

Prof. Dr. Mustafa Özdemir

ANALİTİK GEOMETRİ ve Çözümlü Problemler

520 Çözümlü Örnek, 420 Yanıtlı Alıştırma
320 Test Sorusu

Matrisler -Determinant - Lineer Denklem Sistemleri
Vektörler ve Geometrik Uygulamaları,
Uzayda Doğru ve Düzlem Denklemleri
Koordinat Sistemleri, Konikler, Koordinat Dönüşümleri,
Koniklerin Sınıflandırılması, Kuadratik Yüzeyler
Küre, Silindir, Koni, Dönel Yüzeyler
Uzayda Dönme

ALTIN NOKTA

ANALİTİK GEOMETRİ VE ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

Matrisler - Determinant
Lineer Denklem Sistemleri - Vektörler
Uzayda Doğru Denklemi - Uzayda Düzlem Denklemi

Kutupsal Koordinat Sistemi - Konikler
Koordinat Dönüşümleri - Koniklerin Genel Denklemi
Eğri ve Yüzey Denklemleri
Uzayda Farklı Koordinat Sistemleri

Prof. Dr. Mustafa Özdemir



ALTIN NOKTA YAYINEVİ

İZMİR - 2017

Copyright © Altın Nokta Basım Yayın Dağıtım Bilişim

ISBN 978-605-5255-76-3

ANALİTİK GEOMETRİ VE ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

Prof. Dr. Mustafa Özdemir
mozdemir07@gmail.com

Bu kitabın her hakkı saklıdır. Tüm hakları ALTIN NOKTA YAYINEVİ'NE aittir. Kısmen de olsa alıntı yapılamaz. Metinler, kitabı yayımlayan kurumun önceden izni olmaksızın elektronik, mekanik, fotokopi ya da herhangi bir kayıt sistemiyle çoğaltılamaz, yayımlanamaz. Kitapta yer alan oyun, bulmaca, soru, metin ve resimlerin sorumluluğu tamamen yazarına aittir.

Genel Yayın Yönetmeni
Halil İ. AKÇETİN

Kapak-Dizgi
Altın Nokta Dizgi-Grafik

Baskı
Kanyılmaz Matbaa
Sanat Cad. 5609 Sok. No:13 amdıbi İş Merkezi
Bornova / İzmir Tel: 0 (232) 449 14 43

Yayın - Dağıtım
Altın Nokta Basım Yayın Dağıtım
859 Sk. No:1/Z-4 Konak / İZMİR
Tel- Faks : 0 (232) 441 25 95

www.nokta2000.com
www.altinnokta.com.tr
www.kitapana.com.tr

nokta@nokta2000.com
altinnokta@altinnokta.com.tr
kitapana@kitapana.com.tr

EKİM - 2017
4. Basım

Önsöz

Bu kitap üniversitelerimizin Matematik ve Matematik Eğitimi alanındaki lisans programlarında okutulan Analitik Geometri dersi için, yardımcı bir kaynak olması amacıyla hazırlanmıştır.

Analitik Geometri'nin temeli olan ve ihtiyaç duyulan, Matrisler, Determinant ve Vektörler gibi bazı Lineer Cebir konularına da, kitabın başında detaylı olarak yer verilmiştir. Lineer Cebir dersinin, Analitik Geometri dersiyle birlikte verildiği veya daha önce verildiği üniversitelerde bu kısımların bir bölümü atlanabilir.

Düzlemde doğrunun analitiği gibi, liseden iyi bilinen bazı konular, bu kitapta vektörel açıdan incelendiği için, vektörler kısmında verilmiştir.

Her konudaki en önemli noktalar vurgulanmış, konunun teori kısmı verildikten sonra, her teorem, konu ve önemli noktalar, çeşitli örneklerle zenginleştirilmiştir. Ayrıca, örneklerle benzer sorular, örneklerden hemen sonra yanıtlarıyla birlikte alıştırma olarak verilerek, konunun pekiştirilmesi amaçlanmıştır.

Her konunun sonuna, çözümlü problemler ile birlikte, konunun tekrar edilmesi amaçlanarak bir test sınavı eklenmiştir. Bu test sınavlarının, öğrencinin eksikliklerinin farkına varmasını sağlayacağına, bunun yanında özellikle (ÖABT) Öğretmenlik Alan Sınavı'na girecek öğretmen adaylarına da faydalı olacağına inanıyorum.

Bu kitapta, konuların Teorik kısmı verildikten sonra, toplam olarak,

i. 520 Çözümlü Örnek,

ii. 420 Yanıtlı Alıştırma

iii. 320 Yanıtlı Test

bulunmaktadır. 1260 soru ile, öğrencinin konuları derinlemesine ve kendi kendine öğrenmebilmesi amaçlanmıştır.

Kitabın düzenlenmesinde ve konuların içeriğinde, görüş ve önerileriyle katkıda bulunan değerli hocalarım **Prof. Dr. Abdullah Aziz Ergin'e**, **Prof. Dr. Kazım Ilarslan'a**, **Prof. Dr. Gabil Adilov'a** ve **Prof. Dr. A. Ceylan Çöken'e** ve daima bana destek olan eşim **Burcu Özdemir'e** teşekkür ederim. Kitabın, tüm öğrencilerimize faydalı olmasını diliyorum.

Mustafa Özdemir

Antalya - 2017

**Bu Döküman
Analitik Geometri ve özümlü Problemler
Kitabının
Örnek Sayfalarından oluşmaktadır.**

Kitabı internet sitelerinden bulabilirsiniz.

**Toplu alımlar için
mozdemir07@gmail.com
mail adresinden iletişime geçebilirsiniz.
Ya da, Altın Nokta yayınevini
arayabilirsiniz.**

İçindekiler

BİRİNCİ BÖLÜM

Matrisler

Martislerde İşlemler	13
Bir Matrisin Transpozese	19
Simetrik ve Ters Simetrik Matris	19
Bir Matrisin Tersi	22
Ortogonal Matris	24
Bir Matrisin İzi	26
Elemanter Satır Operasyonları	27
Bir Matrisin Eşelon Formu	28
Bir Matrisin Rankı	29
Bir Matrisin Tersinin Bulunması	31
Çözümlü Problemler	36
Bölüm Sonu Tekrar Testi (Matrisler)	39

İKİNCİ BÖLÜM

Determinant

Determinant	43
Determinantın Özellikleri	50
Kofaktör Yardımıyla Determinant Hesabı	58
Ek Matris	69
Çözümlü Problemler	73
Bölüm Sonu Tekrar Testi (Determinant)	76

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

Lineer Denklem Sistemleri

Lineer Denklem Sistemleri	83
Lineer Homojen Denklem Sistemi	87
Matrisinin Tersi Kullanılarak Denklem Sistemlerinin Çözülmesi	90
Cramer Kuralı	92
Çözümlü Problemler	94
Bölüm Sonu Tekrar Testi (Lineer Denklem Sistemleri)	97

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

Vektörler

Vektörlerde İşlemler	102
Dik Koordinat Sistemi	106
Dik Koordinat Sisteminde İki Nokta Arasındaki Uzaklık	108
Vektörlerin Dik Koordinat Sisteminde Gösterilmesi	109
Vektörlerin Bazı Geometrik Uygulamaları	116
Lineer Bileşim Kavramı	122
Bir Vektör Kümesinin Bir Uzaı Germesi	124
Lineer Bağımsızlık ve Lineer Bağımlılık	127
Bir Uzaının Tabanı ve Boyut	129
İç Çarpım	132
Öklid İç Çarpımının Geometrik Uygulamaları	136
Doğrultman Kosinüsleri	146
Vektörel Çarpım ve Geometrik Uygulamaları	148
Karma Çarpım ve Geometrik Uygulamaları	156
$\mathbb{R}^n$ Uzaında Vektörel Çarpım	154
Çözömlü Problemler	163
Bölüm Sonu Tekrar Testi (Vektörler)	173

BEŞİNCİ BÖLÜM

Uzayda Doğru Denklemi

Bir Noktası ve Doğrultusu Verilen Doğrunun Denklemi	181
İki Noktası Verilen Doğrunun Denklemi	185
Bir Noktası Bilinen ve İki Vektöre Dik Olan Doğrunun Denklemi	186
$\mathbb{R}^3$ Uzaında İki Doğrunun Birbirine Göre Durumları	189
Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı	195
Aykırı İki Doğru Arasındaki Uzaklık	199
Çözömlü Problemler	204
Bölüm Sonu Tekrar Testi (Uzayda Doğru Denklemi)	208

ALTINCI BÖLÜM

Uzayda Düzlem Denklemi

Bir Noktası ve Normali Bilinen Düzlemin Denklemi	211
Üç Noktası Verilen Düzlem Denklemi	215
İki Doğruya Paralel, Bir Noktası Bilinen Düzlemin Denklemi	217
İki Düzlemin Birbirine Göre Durumları	218
Bir Doğru ile Bir Düzlemin Birbirine Göre Durumları	221
Üzerindeki İki Doğrusu Bilinen Düzlemin Denklemi	226
Bir Noktanın Bir Düzleme Uzaklığı	227

Paralel Doğru ve Düzlem Arasındaki Uzaklık	229
Paralel İki Düzlem Arasındaki Uzaklık	229
Düzlem Denkleminin Parametrik Gösterimi	230
Eksenleri Kestiği Koordinatları Verilen Düzlem Denklemi	231
Düzlem Demeti	232
Çözümlü Problemler	233
Bölüm Sonu Tekrar Testi (Uzayda Düzlem Denklemi)	241

YEDİNCİ BÖLÜM

İzdüşüm - Simetri - Yansıma

Bir A Noktasının, Doğru Üzerindeki Dik İzdüşüm Noktasının Koordinatları	245
Bir A Noktasının, Düzlem Üzerindeki Dik İzdüşüm Noktasının Koordinatları	248
Bir Doğrunun Bir Düzlem Üzerindeki Dik İzdüşüm Denkleminin Bulunması	251
Bir noktanın, bir noktaya göre simetriği olan nokta	253
Bir noktanın, bir doğruya göre simetriği olan nokta	254
Düzlemde Bir Noktanın Bir Doğruya Göre Simetriği	257
Bir Doğrunun Bir Doğruya Göre Simetriği	259
Düzlemde Bir Doğrunun Bir Doğruya Göre Simetriği	260
Bir Noktanın Bir Düzleme Göre Simetriği	263
Bir Doğrunun Bir Düzleme Göre Simetriği	265
Çözümlü Problemler	266
Bölüm Sonu Tekrar Testi (Uzayda Düzlem Denklemi)	271

SEKİZİNCİ BÖLÜM

Kutupsal Koordinat Sistemi

Kutupsal ve Dik Koordinatların Birbirine Çevrilmesi	273
Kutupsal Koordinatlarda İki Nokta Arasındaki Uzaklık	275
Kutupsal Koordinatlarda Bir Eğrinin Grafiğinin Çizilmesi	278
Çözümlü Problemler	281
Bölüm Sonu Tekrar Testi (Kutupsal Koordinat Sistemi)	283

DOKUZUNCU BÖLÜM

Konikler

Çemberin Analitik İncelemesi	288
Bir Doğru İle Bir Çemberin Birbirine Göre Durumları	290
Üç Noktası Bilinen Çember Denklemi	292
Bir Çember Üzerindeki Bir Noktadan Çizilen Teğetin Denklemi	294
Bir Çembere Dışındaki Bir Noktadan Çizilen Teğetlerin Denklemi	296
Değme Kirişinin Denkleminin Bulunması	298

Bir Noktanın Bir Çembere Göre Kuvveti	299
Çemberlerin Birbirine Göre Durumu	301
İki Çemberin Dik Kesişmesi	303
Kuvvet Eksenı	304
Çember Demeti	307
Elips	309
Elipsin Dış Merkezliğı	312
Merkezil Elips ile Bir Doğrunun Birbirine Göre Durumları	314
Elipsin Doğrultmanları	317
Orjin Merkezli Olmayan Elipsler	319
Elipsin Alanı	322
Hiperbol	323
Hiperbolün Asimptotları	326
Hiperbolün Dış Merkezliğı	327
Merkezil Hiperbol ile Bir Doğrunun Birbirine Göre Durumları	328
Hiperbolün Doğrultmanları	338
Orjin Merkezli Olmayan Hiperboller	333
Parabol	335
Koniklerin Parametrik Denklemleri	337
Koniklerin Kutupsal Denklemleri	339
Çözömlü Problemler	342
Bölüm Sonu Tekrar Testi (Konikler)	345

ONUNCU BÖLÜM

Koordinat Dönüşümleri

Noktanın Ötelenmesi	353
Eksenlerin Ötelenmesi	355
Noktanın Döndürölmesi	359
Eksenlerin Döndürölmesi	366
Bir Noktanın Başka Bir Nokta Etrafında Döndürölmesi	369
Bir Doğrunun Bir Noktası Etrafında Döndürölmesi	370
Afın Dönüşüm	371
Çözömlü Problemler	373
Bölüm Sonu Tekrar Testi (Koordinat dönüşümleri)	377

ONBİRİNCİ BÖLÜM

Koniklerin Genel Denklemi

Öteleme Yapılarak x ve y 'li terimlerin yok edilmesi	380
--	-----

Dönme Yapılarak xy 'li terimin yok edilmesi	386
Çözümlü Problemler	393
Bölüm Sonu Tekrar Testi (Koniklerin Genel Denklemi)	397
ONİKİNCİ BÖLÜM	
Eğri ve Yüzey Denklemleri	
Eğrilerin ve Yüzeylerin Denklemleri	399
Küre Yüzeyi	404
Kürenin Parametrik Denklemi	408
Küre ve Doğru	409
Küre ve Düzlem	411
Bir Kürenin Teğet Düzleminin Bulunması	416
Silindir Yüzeyi	420
Koni Yüzeyi	422
Kuadratik Yüzeyler	424
Elipsoid	424
Eliptik Silindir	425
Eliptik Dik Koni	426
Tek Kanatlı Hiperboloid	427
Çift Kanatlı Hiperboloid	429
Eliptik Paraboloid	430
Hiperbolik Paraboloid	432
Parabolik Silindir	433
Hiperbolik Silindir	434
Dönel Yüzeyler	435
Çözümlü Problemler	443
Bölüm Sonu Tekrar Testi (Eğri ve Yüzey Denklemleri)	452
ONÜÇÜNCÜ BÖLÜM	
Uzayda Dönme Dönüşümü	
Uzayda Bir Noktanın Standart Eksenler Etrafında Döndürülmesi	459
Uzayda Bir Noktanın Herhangi Bir Eksen Etrafında Döndürülmesi	461
Çözümlü Problemler	467
ONDÖRDÜNCÜ BÖLÜM	
Uzayda Farklı Koordinat Sistemleri	
Uzayda Silindir, Küresel ve Kutupsal Koordinat Sistemleri	470
EK : $\mathbb{R}^n$ Uzayında Vektörel Çarpım	475
Kaynaklar	479

10-135 arası sayfalar bu dökümanda gösterilmemektedir.

Öklid İç Çarpımının Geometrik Uygulamaları

Bu bölümde, Öklid iç çarpımını geometrik olarak nasıl yorumlayabileceğimizi göreceğiz. Öklid iç çarpımını kullanarak, $\mathbb{R}^n$ uzayında açı ve uzunluğu içeren birçok problemi çözmemiz mümkündür. Aşağıda, bunlardan örnekler vereceğiz.

Öklid İç çarpımı ile bir vektörün uzunluğu arasındaki ilişki

Daha önce $\mathbb{R}^n$ uzayında bir $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ vektörünün uzunluğunu

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

ile ifade etmiştik. Diğer taraftan, $\vec{u}$ vektörünün kendisiyle iç çarpımı da,

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$$

olduğundan,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$$

sonucu elde edilir.

Örnek 4.45 $\vec{x} = 2\vec{u} + \vec{v}$ ise $\|\vec{x}\|$ değerini, $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin normuna ve iç çarpımına bağlı olarak yazınız.

Çözüm : İç çarpımın özellikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\| &= \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{\langle 2\vec{u} + \vec{v}, 2\vec{u} + \vec{v} \rangle} \\ &= \sqrt{4\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + 2\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \end{aligned}$$

eşitliğinde, $\|\vec{x}\| = \sqrt{4\|\vec{u}\|^2 + 4\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2}$ bulunur.

Örnek 4.46 $\|\vec{x} + \vec{y}\| = 5$, $\|\vec{x}\| = 1$ ve $\|\vec{x} - \vec{y}\| = 3$ olduğuna göre, $\vec{y}$ vektörünün uzunluğunu bulunuz.

Çözüm : $\|\vec{u}\|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$ bağıntısını ve iç çarpımın özelliklerini kullanacağız.

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \\ &= \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 \\ 25 &= 1 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 \end{aligned} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 &= \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \\ &= \|\vec{x}\|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 \\ 9 &= 1 - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 \end{aligned} \quad (**)$$

olduğundan, (*) ve (**) eşitliklerinden, $\|\vec{y}\| = 4$ elde edilir. Yani, $\vec{y}$ vektörünün uzunluğu 4 br'dir.

4.38) Alıştırma $\|\vec{x} + \vec{y}\| = 6$, $\|\vec{y}\| = 2$ ve $\|\vec{x} - \vec{y}\| = 4$ olduğuna göre, $\vec{x}$ vektörünün uzunluğunu bulunuz.

Yanıt : $\sqrt{22}$.

4.39) Alıştırma $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2}{4}$ olduğunu kanıtlayınız.

4.40) Alıştırma Dik koordinat sisteminde verilen $\vec{u}, \vec{v}$ vektörleri için, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 6$ ve $\|\vec{u} + \vec{v}\| + \|\vec{u} - \vec{v}\| = 12$ ise $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ kaçtır? (ÖABT - 2015)

Yanıt : 7.

4.41) Alıştırma $\|\vec{x}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{y}\| = \sqrt{2}$ ve $\|\vec{x} + \vec{y}\| = \sqrt{7}$ ise $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = ?$ (ÖABT - 2014)

Yanıt : 1.

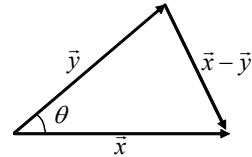
Öklid iç çarpımını kullanarak iki vektörün arasındaki açının bulunması

4.7 ★Teorem $\vec{x}$ ve $\vec{y}$, $\mathbb{R}^n$ uzayında iki vektör olsun. $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ arasındaki açı θ ise,

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$$

'dir.

Kanıt : $\mathbb{R}^n$ uzayında, aralarındaki açı θ olan $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerini alalım. $\vec{x}, \vec{y}$ ve $\vec{x} - \vec{y}$ vektörleri şekildeki gibi bir üçgen oluştururlar ve bu üçgenin kenarları $\|\vec{x}\|, \|\vec{y}\|$ ve $\|\vec{x} - \vec{y}\|$ uzunluğuna sahiptir. Şimdi, Kosinüs teoremini uygulayacağız.



$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos \theta$$

eşitliğinde, sol taraftaki $\|\vec{x} - \vec{y}\|^2$ normunu,

$$\begin{aligned} \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 &= \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle \\ &= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \\ &= \|\vec{x}\|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 \end{aligned}$$

şeklinde yazarsak,

$$\|\vec{x}\|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos \theta$$

eşitliğinde, sadeleştirmeler yapılarak, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos \theta$ elde edilir. Böylece,

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}$$

bulunur. ■

Öklid iç çarpımını kullanarak alan hesaplamalarının yapılabilmesi

$\mathbb{R}^n$ uzayında herhangi iki vektörle oluşturulan paralelkenarın alanını, iç çarpım yardımıyla nasıl hesaplayabileceğimizi aşağıdaki teoremle verelim.

4.8 ★Teorem $\vec{x}$ ve $\vec{y}$, $\mathbb{R}^n$ uzayında iki vektör olsun. $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ arasındaki açı θ olmak üzere, $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ ile oluşturulan paralelkenarın alanı

$$\text{Alan}(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2}$$

'dir.

Kanıt : Aralarındaki açı θ olan, $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını

$$\text{Alan}(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \theta$$

ile bulabiliriz. $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ yazalım. Diğer yandan, $\cos \theta = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$ olduğunu da kullanırsak,

$$\begin{aligned} \text{Alan}(\vec{x}, \vec{y}) &= \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sqrt{1 - \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2}{\|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2}} \\ &= \sqrt{\|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2} \\ &= \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Üçgenin alanı için bu değer 2'ye bölünür. ■

Örnek 4.53 $\vec{x} = (1, 1, 2, 3)$ ve $\vec{y} = (2, 3, 1, 1)$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını bulunuz.

Çözüm : $\text{Alan}(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2}$ eşitliğinden,

$$\text{Alan}(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{15 \cdot 15 - 10^2} = 5\sqrt{5}$$

elde edilir.

Örnek 4.54 Köşelerinin koordinatları $A(1, 1, 1, 0, 1)$, $B(1, 2, 3, 4, 3)$ ve $C(1, 2, 1, 1, 1)$ olan üçgenin alanını bulunuz.

Çözüm : Önce noktadan vektöre geçelim.

$$\vec{x} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0, 1, 2, 4, 2) \text{ ve } \vec{y} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0, 1, 0, 1, 0)$$

denilirse, üçgenin alanı :

$$\text{Alan}(ABC) = \frac{1}{2} \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2} = \frac{1}{2} \sqrt{25 \cdot 2 - 5^2} = \frac{5}{2}$$

bulunur.

4.49) Alıştırma $\vec{x} = (0, 1, 0, 2, 2)$ ve $\vec{y} = (2, 0, 0, 2, 1)$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını bulunuz.

Yanıt : $3\sqrt{5}$.

4.50) Alıştırma Köşelerinin koordinatları $A(1,1,1,0,1)$, $B(1,2,3,4,3)$ ve $C(1,2,1,1,1)$ olan üçgenin alanını bulunuz.

Yanıt : $5/2$.

4.51) Alıştırma $\vec{x} = (1, 2)$ ve $\vec{y} = (2, 1)$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını bulunuz.

Yanıt : 3.

4.9) ★Teorem Düzlemde köşelerinin koordinatları $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ve $C(x_3, y_3)$ olan üçgenin alanı

$$\text{Alan}(ABC) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

değerinin mutlak değeridir.

1. Kanıt : $\vec{BA} = \vec{y} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ ve $\vec{BC} = \vec{x} = (x_3 - x_2, y_3 - y_2)$ ile gösterelim ve

$$\text{Alan}(ABC) = \frac{1}{2} \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2}$$

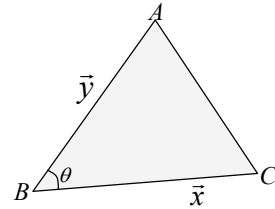
formülünü uygulayalım. Buna göre, uzun ve sıkıcı işlemler sonucunda,

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 &= \left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \right) \left((x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 \right) \\ &\quad - \left((x_1 - x_2)(x_3 - x_2) + (y_1 - y_2)(y_3 - y_2) \right)^2 \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2)^2 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} \text{Alan}(ABC) &= \frac{1}{2} (x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2) \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. ■



2. Kanıt (Klasik Yöntem)

Yamukların alanlarını kullanarak,

$$A(ABC) = A(BMNA) + A(ANKC) - A(BMKC)$$

eşitliğinden sonuca ulaşabiliriz.

$$A(BMNA) = (x_1 - x_2) \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$A(ANKC) = (x_3 - x_1) \left(\frac{y_1 + y_3}{2} \right)$$

$$A(BMKC) = (x_3 - x_2) \left(\frac{y_3 + y_2}{2} \right)$$

olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} Alan(ABC) &= \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2) \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Örnek 4.55 Köşelerinin koordinatları $A(1, 1)$, $B(2, 3)$ ve $C(3, 6)$ olan üçgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm : 1. Yol ($\mathbb{R}^n$ de geçerli genel formül)

$\vec{x} = \overrightarrow{AB}$ ve $\vec{y} = \overrightarrow{AC}$ alabiliriz. Buna göre, $\vec{x} = (1, 2)$ ve $\vec{y} = (2, 5)$ olduğundan,

$$Alan(ABC) = \frac{1}{2} \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2} = \frac{1}{2} \sqrt{5 \cdot 29 - 12^2} = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

2. Yol (Klasik Yöntem)

$$Alan(ABC) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

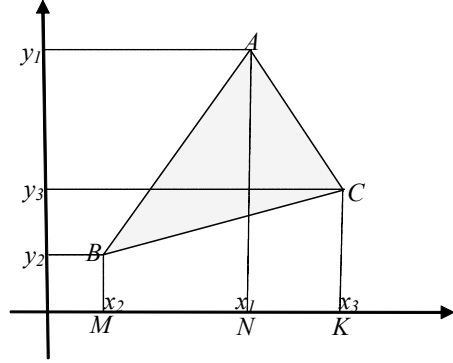
bulunur.

4.52) Alıştırma Köşelerinin koordinatları $A(1, 2)$, $B(2, 3)$ ve $C(3, 1)$ olan üçgenin alanını bulunuz.

Yanıt : $3/2$.

4.53) Alıştırma Köşelerinin koordinatları $A(0, 1)$, $B(6, 3)$, $C(7, 6)$ ve $D(1, 4)$ olan paralelkenarın alanını hesaplayınız.

Yanıt : 16.



4.10 ★ **Teorem (Schwarz Eşitsizliği)** $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ vektörleri için, $\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \geq |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|$ eşitsizliği sağlanır.

Kanıt : $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta$ olduğunu biliyoruz. $|\cos \theta| \leq 1$ olduğundan,

$$\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \geq |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|$$

elde edilir. ■

✎ **Not** Teorem 4.10'un kanıtında, Öklid iç çarpımı söz konusu olduğu için, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta$ eşitliğinden dolayı, Schwarz eşitsizliğinin doğruluğu hemen görülebilmektedir. Fakat, Öklid iç çarpımı dışındaki, herhangi bir iç çarpım için de, bu eşitsizlik daima doğrudur. Herhangi bir iç çarpım için bu eşitsizliğin doğruluğunun kanıtını Problem 4.15'te bulabilirsiniz.

4.11 ★ **Teorem (Üçgen Eşitsizliği)** Bir üçgende, herhangi bir kenar, diğer iki kenarın toplamından küçük, farkından büyüktür.

Kanıt : Yandaki şekile göre,

$$\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| < \|\vec{x} - \vec{y}\| < \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

olduğunu göstereceğiz.

i) $\|\vec{x} - \vec{y}\| < \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ olduğunu görelim.

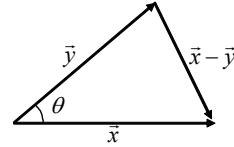
$$\begin{aligned} \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 &= \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \\ &= \|\vec{x}\|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 + 2|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| + \|\vec{y}\|^2 \quad (\text{Schwarz Eşitsizliğinden}) \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 \\ &= (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \end{aligned}$$

eşitsizliğinden, $\|\vec{x} - \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ olduğu görülür.

ii) $\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|$ olduğunu görelim.

$$\begin{aligned} \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 &= \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \\ &= \|\vec{x}\|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 \\ &\geq \|\vec{x}\|^2 - 2|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| + \|\vec{y}\|^2 \\ &\geq \|\vec{x}\|^2 - 2\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 \\ &= (\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|)^2 \end{aligned}$$

eşitsizliğinden istenen elde edilir. Eşitlik durumları, sadece $\theta = 0$ veya $\theta = \pi$ iken sağlanır ki, bu durumlarda üçgenden bahsedilemez. ■



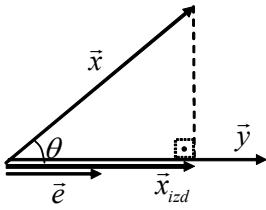
Öklid iç çarpımını kullanarak İzdüşüm Vektörünün bulunması

$\mathbb{R}^n$ uzayında, verilen herhangi bir $\vec{x}$ vektörünün, başka bir $\vec{y}$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörünü de, Öklid iç çarpımı yardımıyla bulabiliriz.

4.12 ★ **Teorem** $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ sıfırdan farklı vektörleri verilsin. $\vec{x}$ vektörünün, $\vec{y}$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörü

$$\vec{x}_{izd} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle} \vec{y}$$

ile bulunur.



Kanıt : $\vec{e}, \vec{y}$ doğrultusundaki birim vektör olsun. Buna göre,

$$\vec{e} = \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} = \frac{\vec{x}_{izd}}{\|\vec{x}_{izd}\|}$$

yazılabilir. Bu eşitlikten, $\vec{x}_{izd} = \frac{\|\vec{x}_{izd}\|}{\|\vec{y}\|} \vec{y}$ elde edilir.

Diğer yandan,

$$\|\vec{x}_{izd}\| = \|\vec{x}\| \cos \theta = \|\vec{x}\| \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{y}\|}$$

olduğu kullanılırsa,

$$\vec{x}_{izd} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{y}\|^2} \vec{y} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle} \vec{y}$$

bulunur. ■

Örnek 4.56 $\vec{x} = (1, 1, 3, 4)$ vektörünün $\vec{y} = (2, 3, 1, 1)$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörünü bulunuz.

Çözüm : Formül uygulanarak

$$\vec{x}_{izd} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle} \vec{y} = \frac{12}{15} \vec{y} = \frac{4}{5} (2, 3, 1, 1)$$

elde edilir. Siz, formül uygulamak yerine, kanıtta kullandığımız yöntemle bulmaya çalışınız.

4.54 **Alıştırma** $\vec{x} = (0, 1, 1, 0, 1)$ vektörünün $\vec{y} = (1, 1, 1, 1, 1)$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörünü bulunuz.

Yanıt : $\vec{x}_{izd} = \frac{3}{5} (1, 1, 1, 1, 1)$.

4.55 **Alıştırma** $\vec{x} = (2, 1, 1)$ vektörünün $\vec{y} = (1, 1, 3)$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörünü bulunuz.

Yanıt : $\vec{x}_{izd} = \frac{6}{11} (1, 1, 3)$.

Vektörel Çarpım ve Geometrik Uygulamaları

Tanım Skaler çarpımın sonucu bir skaler değerdir. İki vektörün vektörel çarpımı ise bir vektördür. Uzayda $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ gibi iki vektörün vektörel çarpımı;

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

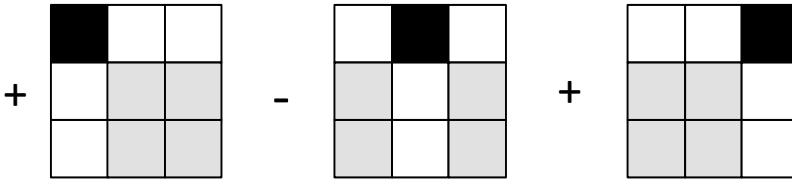
$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_2y_3 - x_3y_2, -x_1y_3 + x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanıma göre, iki vektörün vektörel çarpımının sonucunda yeni bir **vektör** elde edilir.

Örnek 4.59 $\vec{x} = (1, 2, 3)$ ve $\vec{y} = (0, 2, 1)$ olduğuna göre, $\vec{x} \times \vec{y}$ vektörünü bulunuz.

Çözüm : $\vec{x} \times \vec{y} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (-4, -1, 2)$ olur. Bu vektörün hem $\vec{x}$ hem de $\vec{y}$ vektörüyle iç çarpımının sıfır olduğunu ve dolayısıyla $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerine dik olduğunu görünüz.

Not : $\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right)$ şeklinde hesaplanabilir.



4.57) Alıştırma $\vec{x} = (1, 1, 2)$ ve $\vec{y} = (1, 2, 1)$ olduğuna göre, $\vec{x} \times \vec{y}$ vektörünü bulunuz.

Yanıt : $(-3, 1, 1)$.

4.58) Alıştırma $\vec{x} = (-1, 2, 3)$ ve $\vec{y} = (3, -2, 1)$ olduğuna göre, $\vec{x} \times \vec{y}$ vektörünü bulunuz.

Yanıt : $(8, 10, -4)$.

Vektörel Çarpımın Bazı Özellikleri

$\vec{x} \times \vec{y}$ vektörel çarpımını, determinant yardımıyla tanımlamıştık. Determinantın özelliklerini kullanarak, vektörel çarpımın aşağıdaki özelliklerini kolayca yazabiliriz.

1. $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$ (Vektörel çarpımın değişme özelliği yok)

Kanıt : Vektörel çarpımın determinantlı tanımının doğrudan sonucudur. Determinantta iki satırın yeri değişirse, determinant işaret değiştirir.

2. $\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$ (Bir vektörün kendisiyle vektörel çarpımı 0 vektörüdür.)

Kanıt : Herhangi iki satırı aynı olan matrisin determinantının 0 olmasının sonucudur.

3. $\lambda \in \mathbb{R}$ için, $(\lambda \vec{x}) \times \vec{y} = \lambda (\vec{x} \times \vec{y})$

4. $\vec{0} \times \vec{x} = \vec{x} \times \vec{0} = \vec{0}$

5. $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ için $\vec{x} = \lambda \vec{y}$. (Yani, $\vec{x} \parallel \vec{y}$ ise vektörel çarpım 0 vektörüdür.)

6. $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} \times \vec{y}) + (\vec{x} \times \vec{z})$.

Örnek 4.60 $\vec{x} = (1, -2, 3)$ ve $\vec{y} = (-2, 4, -6)$ ise $\vec{x} \times \vec{y} = ?$

Çözüm : $\vec{y} = -2\vec{x}$ olduğundan, $\vec{x} \parallel \vec{y}$ olur ki, $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$ olur.

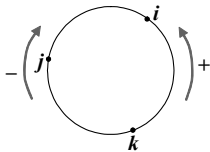
4.59) Alıştırma Vektörel çarpımı $\vec{0}$ olan iki vektör yazınız.

Örnek 4.61 $\mathbb{R}^3$ uzayının $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ standart vektörleri için, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ve $\vec{k} = (0, 0, 1)$ olduğunu kullanacağız.

$$\vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{j}$$

biçiminde kolayca görülebilir.



Not : Standart birim vektörlerin vektörel çarpımında yandaki şekil kullanılabilir.

$$\begin{array}{ll} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} & \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \end{array}$$

Örnek 4.62 *Vektörel çarpım işleminin birleşme özelliği var mıdır?*

Çözüm : Vektörel çarpım işleminin birleşme özelliğinin olmadığını bir ters örnekle gösterebiliriz. $\vec{x} = (1, 0, 1)$, $\vec{y} = (0, 1, 1)$ ve $\vec{z} = (1, 1, 0)$ vektörlerini alalım ve $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} \neq \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$ olduğunu görelim.

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 1) \text{ ve } \vec{y} \times \vec{z} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, -1)$$

olduğundan,

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0)$$

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 0, 1)$$

elde edilir ki, $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} \neq \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$ olduğundan, vektörel çarpımda birleşme özelliği yoktur.

Vektörel Çarpımın En Önemli Geometrik Yorumu

4.14 ★ Teorem *Uzayda verilen iki vektörün vektörel çarpımı, çarpılan her iki vektöre de dik olan yeni bir vektör verir.*

Kanıt : $\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{x}$ ve $\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{y}$ olduğunu göstermek için,

$$\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{y} \rangle = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ vektörleri için,

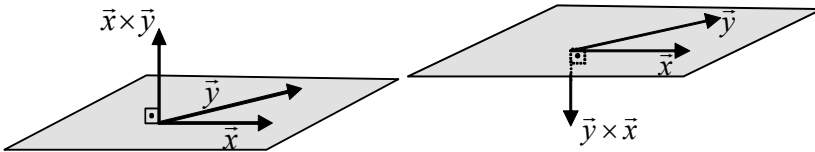
$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_2y_3 - x_3y_2, -x_1y_3 + x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1)$$

olduğundan,

$$\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \rangle = x_2y_3x_1 - x_3y_2x_1 - x_1y_3x_2 + x_3y_1x_2 + x_1y_2x_3 - x_2y_1x_3 = 0$$

$$\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{y} \rangle = x_2y_3y_1 - x_3y_2y_1 - x_1y_3y_2 + x_3y_1y_2 + x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3 = 0$$

olduğu görülebilir. ■



Örnek 4.63 $\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{x} = (2, 3, 11)$ ve $\vec{y} = (-2, 7, 5)$ vektörlerinin her ikisine de dik olan bir vektör bulunuz.

Çözüm : Bu iki vektörün vektörel çarpımları, her ikisine de dik olan istenen vektörü verecektir.

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 11 \\ -2 & 7 & 5 \end{vmatrix} = -62\vec{i} - 32\vec{j} + 20\vec{k}$$

olduğundan, $\vec{z} = (-62, -32, 20)$ vektörü, hem $\vec{x}$ hem de $\vec{y}$ vektörüne dik bir vektördür.



Not Bir $\mathbb{V}$ vektör uzayının tabanındaki tüm vektörler birbirine dik ise, bu tabana $\mathbb{V}$ uzayının **ortogonal tabanı** denir. Bu vektörlerin herbiri ayrıca birim vektör ise bu tabana **ortonormal taban** denir.

Örneğin,

$$\{\vec{u}_1 = (1, 2, 2), \vec{u}_2 = (2, 1, -2), \vec{u}_3 = (2, -2, 1)\}$$

tabanı bir ortogonal taban,

$$\left\{ \vec{u}_1 = \frac{1}{3}(1, 2, 2), \vec{u}_2 = \frac{1}{3}(2, 1, -2), \vec{u}_3 = \frac{1}{3}(2, -2, 1) \right\}$$

tabanı ise bir ortonormal tabandır.

Örnek 4.64 $\mathbb{R}^3$ uzayının $\vec{x} = (1, 2, 3)$ vektörünü içeren bir ortogonal tabanını bulunuz.

Çözüm : Önce, $\vec{x} = (1, 2, 3)$ vektörüne dik herhangi bir vektör alalım. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ olacak şekilde, $\vec{y} = (1, 1, -1)$ vektörü alınabilir. Şimdi, ise, hem $\vec{x}$ hem de $\vec{y}$ vektörüne dik bir vektör bulalım. Bu kez, $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{z}$ alınabilir. Buradan,

$$\vec{z} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-5, 4, -1)$$

olur. Böylece,

$$\{\vec{x} = (1, 2, 3), \vec{y} = (1, 1, -1), \vec{z} = (-5, 4, -1)\}$$

$\mathbb{R}^3$ ün ortogonal bir tabanı olur. Ayrıca, ortonormal tabanını da her vektörü normuna bölerek elde edebiliriz. Buna göre,

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1), \frac{1}{\sqrt{42}}(-5, 4, -1) \right\}$$

ise ortonormal tabandır. Siz de, kendi belirleyeceğiniz bir $\vec{y}$ vektörüyle başka bir ortogonal taban bulunuz.

151-154 arası sayfalar bu dökümanda gösterilmemektedir.

4.18 ★ **Teorem** $\mathbb{R}^3$ de, $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \times \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle & \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle \\ \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle & \langle \vec{y}, \vec{w} \rangle \end{vmatrix}$ eşitliği sağlanır.

(Lagrange Özdeşliği)

Kanıt : Bir önceki teoremi kullanırsak,

$$\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \times \vec{w} \rangle = \langle (\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}, \vec{w} \rangle$$

yazılabilir. Şimdi de, $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle \vec{y} - \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle \vec{x}$ eşitliğini kullanıp, iç çarpımın lineerliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \times \vec{w} \rangle &= \langle (\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}, \vec{w} \rangle = \langle \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle \vec{y} - \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle \vec{x}, \vec{w} \rangle \\ &= \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle \langle \vec{y}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle \\ &= \begin{vmatrix} \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle & \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle \\ \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle & \langle \vec{y}, \vec{w} \rangle \end{vmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

4.64 📖 **Alıştırma** $\mathbb{R}^3$ uzayında Lagrange özdeşliğini kullanarak $\|\vec{x} \times \vec{y}\|^2$ ifadesini iç çarpıma bağlı olarak bulunuz.

Vektörel Çarpımın Normunun Geometrik Anlamı

4.19 ★ **Teorem** $\mathbb{R}^3$ uzayında verilen $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere, $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanı $Alan(\vec{x}, \vec{y})$ ise,

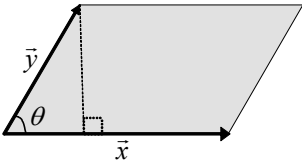
$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \theta = Alan(\vec{x}, \vec{y})$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt : $\|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle$ şeklinde yazıp, Lagrange özdeşliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 &= \begin{vmatrix} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle & \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \\ \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle & \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \end{vmatrix} = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \\ &= \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

elde edilir.



Diğer yandan, $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanı :

$Alan(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \theta$ olduğundan,

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \theta = Alan(\vec{x}, \vec{y})$$

bulunur. Sonuç olarak, $\mathbb{R}^3$ uzayında verilen iki vektörün vektörel çarpımının normu, bu iki vektörle oluşturulan paralelkenarın alanını verir. (Bunun sadece $\mathbb{R}^3$ de geçerli olduğunu unutmayınız!) ■

Örnek 4.67 $\mathbb{R}^3$ de verilen $\vec{x} = (1, 2, 3)$ ve $\vec{y} = (3, 2, 1)$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını bulunuz.

Çözüm : Yukarıdaki özellik kullanılarak,

$$Alan(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} \times \vec{y}\| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \|(-4, 8, -4)\| = 4\sqrt{6}$$

bulunur.

Örnek 4.68 $\mathbb{R}^4$ de verilen $\vec{x} = (0, 1, 2, 3)$ ve $\vec{y} = (3, 2, 1, 0)$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını bulunuz.

Çözüm : Uzayımız $\mathbb{R}^4$ olduğu için, vektörel çarpımlı alan formülü kullanılamaz. Bu kez,

$$Alan(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2}$$

olduğunu kullanacağız. Buna göre,

$$Alan(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{14 \cdot 14 - 16} = 6\sqrt{5}$$

bulunur.

Örnek 4.69 Verilen iki $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörü için, $\vec{u} \times \vec{x} = \vec{y}$ ve $\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle = \|\vec{x}\|$ eşitlikleri sağlandığına göre, $\|\vec{u}\|$ değerini, $\|\vec{x}\|$ ve $\|\vec{y}\|$ cinsinden belirleyiniz.

Çözüm : $\vec{u} \times \vec{x} = \vec{y}$ eşitliği, $\vec{y}$ vektörünün $\vec{x}$ vektörüne dik olduğunu gösterir. $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ birbirine dik değilse, $\vec{u}$ vektörü için bir çözüm yoktur. O halde, $\vec{x} \perp \vec{y}$ için denklemin çözümünü yapalım. $\vec{x}$ ile $\vec{u}$ arasındaki açı θ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \times \vec{x}\| &= \|\vec{u}\| \|\vec{x}\| \sin \theta \Rightarrow \|\vec{y}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{x}\| \sin \theta \\ \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle &= \|\vec{u}\| \|\vec{x}\| \cos \theta \Rightarrow \|\vec{x}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{x}\| \cos \theta \end{aligned}$$

eşitliklerinin kareleri toplamından,

$$\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{x}\|^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

olur. Buradan, $\|\vec{u}\| = \sqrt{1 + \frac{\|\vec{y}\|^2}{\|\vec{x}\|^2}}$ elde edilir.

4.65) Alıştırma $\mathbb{R}^3$ de verilen $\vec{u} = (1, 1, k)$ ve $\vec{v} = (2, 1, 3)$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanı $\sqrt{6}$ ise k kaçtır?

Yanıt : 1.

Karma Çarpım ve Geometrik Uygulamaları

Tanım $\mathbb{R}^3$ uzayında, $\vec{x} \times \vec{y}$ vektörel çarpımıyla, $\vec{z}$ vektörünün iç çarpımına, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ vektörlerinin **karma çarpımı** denir. Yani, $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle$ değerine $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ vektörlerinin karma çarpımı denir ve $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$ ile gösterilir. Yukarıda,

$$\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle = \det (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

olduğu göstermiştik. O halde, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ vektörlerinin karma çarpımı,

$$[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = \det (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z} \rangle$ eşitliğine göre, bir karma çarpımda önemli olan vektörlerin sırasıdır. Vektörel çarpım işlemi, ilk iki veya son iki vektör arasında olabilir ve her iki değer de bu üç vektörün karma çarpımını verir.

Örnek 4.70 $\vec{x}=(1, 2, 3), \vec{y}=(3, 2, 4)$ ve $\vec{z}=(1, 1, 0)$ olduğuna göre $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = ?$

Çözüm : $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = \det (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tanımı kullanılarak

$$[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 7$$

elde edilir.

4.66) Alıştırma $\vec{x}=(1, 0, 3), \vec{y}=(0, 2, 1)$ ve $\vec{z}=(1, 2, 0)$ olduğuna göre $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = ?$

Yanıt : -8 .

4.67) Alıştırma $\vec{x} = (1, k, 3), \vec{y} = (3, 2, 1)$ ve $\vec{z} = (1, 2, 0)$ vektörlerinin karma çarpımı 0 ise $k = ?$

Yanıt : $k = -10$.

Karma Çarpımın Özellikleri

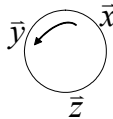
Aşağıdaki özellikler determinantın özelliklerinden kolayca görülebilir.

1. Vektörlerden ikisi eşit olan üç vektörün karma çarpımı 0'dır.

$$[\vec{x}, \vec{y}, \vec{x}] = 0, [\vec{x}, \vec{x}, \vec{y}] = 0, [\vec{x}, \vec{y}, \vec{y}] = 0$$

2. $\lambda, k, m \in \mathbb{R}$ için, $[\lambda \vec{x}, k \vec{y}, m \vec{z}] = \lambda k m [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$

3. $\lambda \in \mathbb{R}$ için, $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} + \lambda \vec{w}] = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] + \lambda [\vec{x}, \vec{y}, \vec{w}]$



4. $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = [\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}] = [\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}] = -[\vec{y}, \vec{x}, \vec{z}] = -[\vec{x}, \vec{z}, \vec{y}] = -[\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}]$.

Örnek 4.71 $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = 3$ olduğuna göre, $[\vec{x} + 2\vec{y}, \vec{z} + \vec{y}, 3\vec{x} + 4\vec{z}]$ karma çarpımını hesaplayınız.

Çözüm : Determinant özelliklerini kulanırsak,

$$\begin{aligned} [\vec{x} + 2\vec{y}, \vec{z} + \vec{y}, 3\vec{x} + 4\vec{z}] &= \begin{vmatrix} \vec{x} + 2\vec{y} \\ \vec{z} + \vec{y} \\ 3\vec{x} + 4\vec{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{vmatrix} \\ &= 10 \begin{vmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{vmatrix} = 10 [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = 10 \cdot 3 = 30 \end{aligned}$$

elde edilir.

4.68) Alıştırma $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = 3$ olduğuna göre, $[3\vec{x} + \vec{z}, \vec{z} - \vec{y}, \vec{x} + 3\vec{z}] = ?$

Yanıt : -24.

Karma Çarpımın Geometrik Anlamı

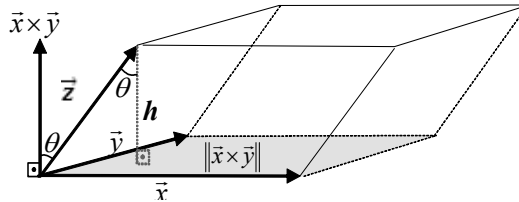
4.20) ★ Teorem $\mathbb{R}^3$ uzayında, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ vektörlerinin karma çarpımının mutlak değeri, $\vec{x}, \vec{y}$ ve $\vec{z}$ vektörleriyle oluşturulan paralelyüzlünün hacmini verir.

Kanıt : $\vec{x}, \vec{y}$ ve $\vec{z}$ vektörleriyle oluşturulan paralelyüzlüyü şekildeki gibi çizelim. Kanıtımızda vektörlerdeki üç önemli özelliğini kullanacağız.

i) $\vec{x} \times \vec{y}$, hem $\vec{x}$ hem $\vec{y}$ 'ye diktir. O halde, $\vec{x} \times \vec{y}$ paralelyüzlünün yüksekliği doğrultusundadır.

ii) $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ ile oluşturulan taban alanı $\|\vec{x} \times \vec{y}\|$ 'dir.

iii) $\vec{x} \times \vec{y}$ ile $\vec{z}$ arasındaki açı θ ise, $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle = \|\vec{x} \times \vec{y}\| \|\vec{z}\| \cos \theta$ 'dır.



Buna göre, V hacimi göstermek üzere, kanıtımızı

$$\begin{aligned} V &= \text{Taban Alanı} \cdot \text{Yükseklik} \\ &= \|\vec{x} \times \vec{y}\| \cdot h = \|\vec{x} \times \vec{y}\| \|\vec{z}\| \cos \theta \\ &= |\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle| = |[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]| \end{aligned}$$

biçiminde yapabiliriz. ■

Örnek 4.72 $\vec{x} = (1, 2, 1)$, $\vec{y} = (1, 3, 4)$ ve $\vec{z} = (2, 3, 1)$ vektörleriyle oluşturulan paralelyüzünün hacmini bulunuz.

Çözüm : Karma çarpımın geometrik yorumu kullanılırsa,

$$\text{Hacim}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = |[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

olur.

4.69) Alıştırma $\vec{x} = (0, 2, 1)$, $\vec{y} = (5, 3, 4)$ ve $\vec{z} = (1, 3, 1)$ vektörleriyle oluşturulan paralelyüzünün hacmini bulunuz.

Yanıt : 10.

Karma Çarpımın Geometrik Yorumunun Bazı Sonuçları

- ★ Üç vektörün karma çarpımının sıfır olması demek, hacim oluşmaması demektir. Yani, üç vektörün aynı düzlemde olması demektir.
- ★ Üç vektörün karma çarpımının sıfır olması demek, bu üç vektörün lineer bağımlı olması demektir.
- ★ Üç vektörün karma çarpımı sıfır ise, bu üç vektörün gerdiği uzayın boyutu 3'den kesinlikle küçüktür.
- ★ Üç vektörün karma çarpımı sıfır ise, bu üç vektörün oluşturduğu matrisin rankı 3'den kesinlikle küçüktür.
- ★ Üç vektörün karma çarpımı sıfırdan farklı ise, bu vektörler lineer bağımsızdır.
- ★ Karma çarpımı sıfırdan farklı olan üç vektör, $\mathbb{R}^3$ uzayını gererler.
- ★ Karma çarpımı sıfırdan farklı olan üç vektör, $\mathbb{R}^3$ uzayı için bir tabandır.

Örnek 4.73 $\vec{x} = (1, 1, 2)$, $\vec{y} = (1, 2, 3)$ ve $\vec{z} = (2, 3, k)$ vektörleri lineer bağımlı ise $k = ?$

Çözüm : $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ vektörleri lineer bağımlı ise, $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = 0$ olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & k \end{vmatrix} = k - 5 = 0$$

eşitliğinden, $k = 5$ bulunur.

4.70) Aıştırma $\vec{x} = (k, 1, 2)$, $\vec{y} = (1, 0, 3)$ ve $\vec{z} = (2, 1, k)$ vektörleri lineer bağımlı ise $k = ?$

Yanıt : $k = 2$.

Örnek 4.74 $\vec{x} = (1, 1, 2)$, $\vec{y} = (0, 1, 3)$ ve $\vec{z} = (2, 1, 3)$ vektörlerinin lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] \neq 0$ ise $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ lineer bağımsız olur.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

olduğundan, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ vektörleri lineer bağımsızdırlar.

Örnek 4.75 $\vec{x} = (1, 2, k)$, $\vec{y} = (2, 3, 1)$ ve $\vec{z} = (2, 1, 3)$ vektörleri aynı düzlemde ise $k = ?$

Çözüm : $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ aynı düzlemde ise, $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = 0$ olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4k = 0$$

eşitliğinden, $k = 0$ olur.

Örnek 4.76 $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$, $C(2, 3, 4)$, $D(1, 4, k)$ noktaları aynı düzlemde ise $k = ?$

Çözüm : Önce noktadan vektöre geçelim. $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{z} = \overrightarrow{AD}$ denilirse, $\vec{x} = (0, 1, 2)$, $\vec{y} = (1, 2, 3)$ ve $\vec{z} = (0, 3, k - 1)$ olur. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ aynı düzlemde ise, $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = 0$ olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & k - 1 \end{vmatrix} = 7 - k = 0$$

eşitliğinden, $k = 7$ bulunur.

4.71) Aıştırma $\vec{x} = (1, 1, k)$, $\vec{y} = (1, 3, 1)$ ve $\vec{z} = (k, 1, 3)$ vektörleri aynı düzlemde ise $k = ?$

Yanıt : $k \in \{-1, 5/3\}$.

4.72) Alıştırma $A(k, 1, 2)$, $B(1, 0, 3)$, $C(2, 1, k)$ ve $D(1, 1, 1)$ noktaları aynı düzlemde ise $k = ?$

Yanıt : $k \in \{0, 2\}$.

Örnek 4.77 $\vec{x} = (1, 1, 2)$, $\vec{y} = (0, k, 3)$ ve $\vec{z} = (2, 1, 3)$ vektörleri $\mathbb{R}^3$ uzayının bir tabanı ise $k = ?$

Çözüm : $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = 0$ ise, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ lineer bağımlı olur.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & k & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - k = 0$$

olursa, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ lineer bağımlı olur ve $\mathbb{R}^3$ için taban olamazlar. Yani, $k \neq 3$ için taban olurlar.

4.21) ★ Teorem Köşeleri A, B, C, D olan, $ABCD$ üçgensel piramidinin hacmi :

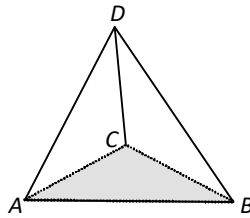
$$V = \text{Hacim}(ABCD) = \frac{1}{6} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] \right|$$

değerine eşittir.

Kanıt : Üçgensel piramidin hacminin,

$$V = \frac{1}{3} (\text{Taban Alanı}) \cdot (\text{Yükseklik})$$

olduğunu hatırlayınız.



Üçgensel piramidin taban alanı : $\frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$ olduğunu biliyoruz. Diğer yandan, θ açısı, $\vec{AD}$ vektörüyle $\vec{AB} \times \vec{AC}$ arasındaki açı olmak üzere, yükseklik $\|\vec{AD}\| \cos \theta$ olduğundan, istenen hacim :

$$V = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| \|\vec{AD}\| \cos \theta = \frac{1}{6} [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]$$

elde edilir.

Örnek 4.78 Köşelerinin koordinatları $A(1, 1, 1), B(1, 2, 3), C(2, 3, 4), D(1, 4, 2)$ olan üçgensel piramidin hacmini bulunuz.

Çözüm : $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 2), \overrightarrow{AC} = (1, 2, 3), \overrightarrow{AD} = (0, 3, 1)$ olduğundan,

$$V = \text{Hacim}(ABCD) = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{5}{6}$$

elde edilir.

4.73) Alıştırma Köşelerinin koordinatları $A(0, 0, 0), B(1, 2, 3), C(3, 0, 0), D(0, 0, 5)$ olan üçgensel piramidin hacmini bulunuz.

Yanıt : 5.

4.22) ★ Teorem $\mathbb{R}^3$ uzayında, tepe noktası E ve tabanının köşeleri A, B, C, D olan, $ABCDE$ dörtgensel piramidinin hacmi :

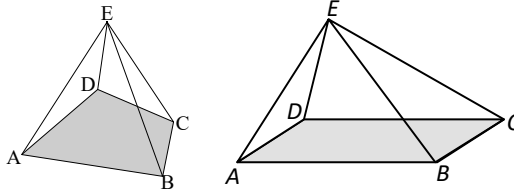
$$V = \text{Hacim}(ABCDE) = \frac{1}{6} \left(\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) + \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}) \right)$$

değerine eşittir.

Kanıt : Dörtgensel piramidin hacmini, iki üçgensel piramidin hacminin toplamı olarak yazıp sonuca ulaşacağız. Buna göre,

$$\begin{aligned} V(ABCDE) &= V(ABDE) + V(BCDE) \\ &= \frac{1}{6} [\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})] + \frac{1}{6} [\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE})] \\ &= \frac{1}{6} \left(\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) + \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}) \right) \end{aligned}$$

değeri bize istenen hacmi verecektir.



Eğer özel olarak, piramidimizin alanı bir paralelkenar ise, iki üçgensel piramidin hacimleri aynı olacağından,

$$V(ABCDE) = \frac{1}{3} \left(\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) \right)$$

olur.

Örnek 4.79 *Tepesi noktası $E(3, 4, 5)$ olan ve tabanının koordinatları $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$, $C(2, 4, 1)$, $D(3, 2, k)$ olan dörtgensel piramidin hacmini bulunuz.*

Çözüm : Öncelikle, A, B, C ve D noktalarının aynı düzlemde olması için k 'nın değerini bulalım. Bunun için,

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$$

olması gerektiğini kullanabiliriz. Buradan,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & k-1 \end{vmatrix} = -k - 9 = 0$$

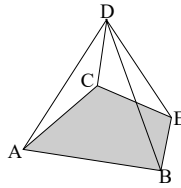
eşitliğinden, $k = -9$ olur. Buna göre, dörtgensel piramidin hacmi:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} \left(\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) + \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}) \right) \\ &= \frac{1}{6} \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -10 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -12 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

eşitliğinden, $V = \frac{1}{6} (16 + 40) = \frac{28}{3}$ elde edilir.

Örnek 4.80 *Köşelerinin koordinatları $A(1, 2, 1)$, $B(3, 5, 1)$, $C(0, 2, 7)$, $D(1, 1, 1)$ ve $E(4, 5, -4)$ olan dörtgensel piramidin hacmini bulunuz.*

Çözüm : Öncelikle, hangi noktaların aynı düzlemde olduğu bulunmalıdır. Bir kaç denemeden sonra, A, B, C, E 'nin düzlemsel ve dolayısıyla tabandaki dört nokta olduğu, D noktasının ise tepesi noktası olduğu görülebilir.



Buna göre istenen hacim :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} \left(\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) + \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}) \right) \\ &= \frac{1}{6} \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & -5 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

eşitliğinden, $V = \frac{1}{6} (12 + 6) = 3$ elde edilir.

Çözümlü Problemler

4.1 Problem : Herhangi bir ABC üçgeninde, G ağırlık merkezi olmak üzere, $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ olduğunu kanıtlayınız. (Ağırlık merkezi, kenarortayların kesim noktasıdır ve kenarortaylar birbirlerinin 1:2 oranında bölerler.) (Bak. Problem 4.5)

Çözüm : AD kenarortayının üzerinde, $|GD| = |DK|$ olacak şekilde bir D noktası alalım. Bu durumda,

$$|GD| = |DK| \text{ ve } |BD| = |DC|$$

olduğundan, $BGCK$ dörtgeninde köşegenler birbirine ortaladığı için, $BGCK$ dörtgeni bir paralelkenardır.

Buna göre, paralelkenar kuralına göre vektörlerin toplanması gözönüne alınırsa,

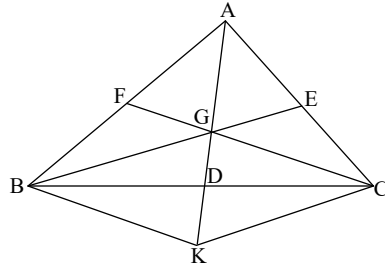
$$\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GK}$$

elde edilir. $|AG| = 2|GD| = |GK|$ olduğundan, $\vec{GK} = \vec{AG}$ yazılabilir. Buradan,

$$\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{AG} = -\vec{GA},$$

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

bulunur.



4.2 Problem : ABC üçgeninin kenarları üzerinde, $|AE| = 3|EC|$, $|CF| = 3|FB|$ ve $|BD| = 3|DA|$ olacak şekilde, F, E, D noktaları alınıyor. Üçgenin bulunduğu düzlemdeki herhangi bir nokta P olsun, $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{x}$ ise $\vec{PD} + \vec{PE} + \vec{PF}$ toplamını $\vec{x}$ vektörü cinsinden bulunuz.

Çözüm :

$$\vec{PD} = \vec{PA} + \vec{AD} = \vec{PA} + \frac{1}{4}\vec{AB}$$

$$\vec{PE} = \vec{PC} + \vec{CE} = \vec{PC} + \frac{1}{4}\vec{CA}$$

$$\vec{PF} = \vec{PB} + \vec{BF} = \vec{PB} + \frac{1}{4}\vec{BC}$$

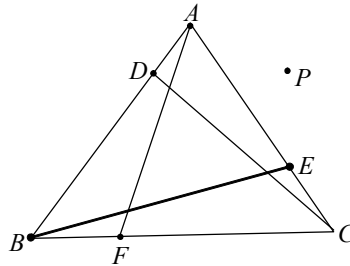
eşitliklerini taraf tarafa toplarsak, ve

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$$

olduğunu kullanırsak,

$$\vec{PD} + \vec{PE} + \vec{PF} = \vec{x} + \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) = \vec{x} + \frac{1}{4}\vec{0} = \vec{x}$$

elde edilir.



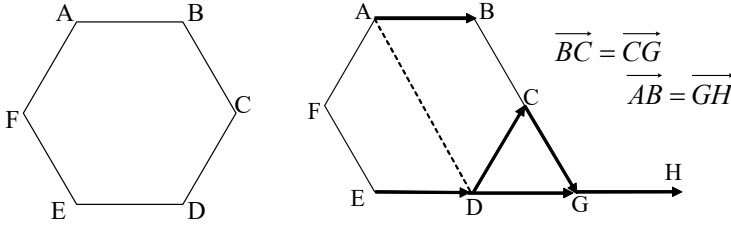
4.3 Problem : $ABCDEF$ bir düzgün altıgen olduğuna göre, aşağıdakilerin doğru yada yanlış olup olmadıklarını açıklayınız.

I. $\|\vec{AB} + \vec{ED} + \vec{DC} + \vec{BC}\| = 3\|\vec{AF}\|$,

II. $\vec{ED} + \vec{DC} = \vec{FE} + \vec{AF}$

III. $\|\vec{ED} + \vec{EF}\| = \|\vec{BA} + \vec{AF}\|$

Çözüm : Şekil üzerinden takip ediniz.



I. $\vec{BC} = \vec{CG}$ ve $\vec{AB} = \vec{GH} = \vec{ED} = \vec{DG}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\|\vec{AB} + \vec{ED} + \vec{DC} + \vec{BC}\| = \|\vec{ED} + \vec{DC} + \vec{CG} + \vec{GH}\| = \|\vec{EH}\| = 3\|\vec{ED}\|$$

olur. $ABCDEF$ düzgün altıgen olduğundan, $\|\vec{ED}\| = \|\vec{AF}\|$ ve

$$\|\vec{AB} + \vec{ED} + \vec{DC} + \vec{BC}\| = 3\|\vec{AF}\|$$

elde edilir. I doğrudur.

II ve III. $\vec{ED} + \vec{DC} = \vec{EC}$ ve $\vec{FE} + \vec{AF} = \vec{AE}$ olduğundan, $\vec{EC} \neq \vec{AE}$ dir. Bu iki vektörün doğrultuları farklı olsa da, uzunlukları eşittir. Bu nedenle, II yanlış, III ise doğrudur.

4.4 Problem : Paralelkenarın köşegenlerinin birbirini ortaladığını kanıtlayınız.

Çözüm :

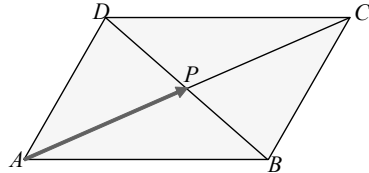
$ABCD$ bir paralelkenar ve köşegenlerin kesişim noktası da P olsun. $\vec{AP}$ vektörünü,

$$\vec{AP} = \lambda \vec{AC} = \lambda(\vec{AB} + \vec{BC}) = \lambda(\vec{AB} + \vec{AD})$$

ve

$$\begin{aligned} \vec{AP} &= \vec{AB} + \vec{BP} = \vec{AB} + k\vec{BD} \\ &= \vec{AB} + k(\vec{BA} + \vec{AD}) = (1 - k)\vec{AB} + k\vec{AD} \end{aligned}$$

şeklinde iki farklı biçimde yazabiliriz.



4.8 Problem : $\mathbb{R}^2$ uzayında, $\vec{x} = (x_1, x_2)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2)$ için, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2$ iç çarpımı tanımlanıyor. Bu iç çarpım uzayında $\vec{u} = (2, 1)$ ve $\vec{v} = (3, a)$ vektörleri birbirine dik ise a kaçtır (2014 - ÖABT-İÖM)

Çözüm : $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ ise, $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri birbirine diktir. Buna göre,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2 \cdot 3 + 2(1 \cdot a) = 0$$

eşitliğinden $a = -3$ bulunur.

4.9 Problem : $\mathbb{R}^2$ de $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$ için,

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 3x_2 y_2$$

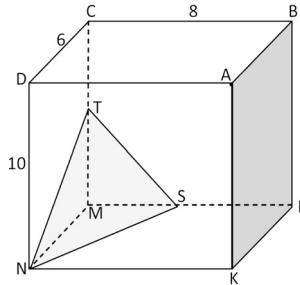
şeklinde tanımlanan fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpımla birlikte $\mathbb{R}^2$ iç çarpım uzayında verilen $\vec{u} = (1, 2)$ vektörünün normunu bulunuz.

Çözüm : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{f(\vec{u}, \vec{u})}$ şeklinde tanımlandığından,

$$\|\vec{u}\| = \|(1, 2)\| = \sqrt{1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 2} = 3$$

bulunur.

4.10 Problem : Şekildeki dikdörtgenler prizması şeklindeki odanın bir köşesinde bulunan üçgen duvarın odaya bakan yüzü boyanacaktır. T , $[MC]$ 'nin orta noktası, S ise $[ML]$ 'nin orta noktası olduğuna göre, bu yüzün alanını bulunuz.



Çözüm : $N(6, 0, 0)$, $S(0, 4, 0)$ ve $T(0, 0, 5)$ olduğundan,

$$\vec{x} = \vec{NT} = T - N = (-6, 0, 5)$$

$$\vec{y} = \vec{NS} = S - N = (-6, 4, 0)$$

olduğu göz önüne alınırsa,

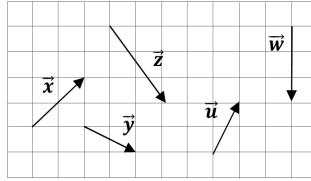
$$\text{Alan}(ABC) = \frac{1}{2} \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2} = \frac{1}{2} \sqrt{61 \cdot 52 - 36^2} = \sqrt{469}$$

elde edilir.

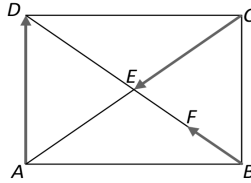
Bölüm Sonu Tekrar Testi (VEKTÖRLER)

1. $A(1, 2, 4, 2)$ ve $B(3, 4, 1, 2)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.
A) $\sqrt{3}$ **B)** $\sqrt{13}$ **C)** $\sqrt{14}$ **D)** $\sqrt{15}$ **E)** $\sqrt{17}$

2. Aşağıdaki birim karelerden oluşan koordinat sisteminde verilen vektörlere göre, $2\vec{x} - \vec{y} + \vec{z} + 2\vec{u} + \vec{w}$ vektörünün konum vektörü nedir?



- A)** $(6, 3)$ **B)** $(6, 1)$ **C)** $(4, 2)$ **D)** $(7, 1)$ **E)** $(5, 3)$
3. $ABCD$ bir dikdörtgen ve F , $[BE]$ 'nin orta noktası olmak üzere, $\vec{AD} + \vec{CE} + \vec{BF}$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?



- A)** $\frac{1}{4}\vec{BC}$ **B)** $\frac{3}{4}\vec{FE}$ **C)** $3\vec{FB}$ **D)** $\frac{1}{2}\vec{AE}$ **E)** $3\vec{FE}$
4. $\vec{u} = (1, 2, 1, 3, 2)$ vektörünün uzunluğu kaç birimdir?
A) $\sqrt{29}$ **B)** $\sqrt{13}$ **C)** $\sqrt{14}$ **D)** $\sqrt{19}$ **E)** $\sqrt{17}$
5. $\vec{x} = (a \cos t, a \sin t, b \sin 2t, b \cos 2t)$ vektörünün her $t \in \mathbb{R}$ için birim vektör olması için, aşağıdakilerden hangisi sağlanmalıdır?
A) $a^2 + b^2 = 1$ **B)** $a + b = 1$ **C)** $ab = 1$ **D)** $2a^2 + b^2 = 1$ **E)** $a^2 + 2b^2 = 1$
6. $A(1, 3)$ ve $B(3, 6)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi nedir?
A) 2 **B)** -2 **C)** $3/2$ **D)** $5/2$ **E)** -3

VEKTÖRLER

177

30. Aşağıdakilerden hangisi $\vec{x} = (2, 1, 4)$ vektörüne dik değildir?
A) $(2, 0, -1)$ **B)** $(3, 2, -2)$ **C)** $(-3, 2, 1)$ **D)** $(1, 1, -2)$ **E)** $(1, 2, -1)$
31. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{x} = (1, 1, k)$, $\vec{y} = (m, -1, 3)$ ve $\vec{z} = (3, n, 1)$ vektörleri ikişer olarak birbirlerine dik olduklarına göre, k kaçtır?
A) $\frac{5}{8}$ **B)** $\frac{9}{8}$ **C)** $\frac{7}{8}$ **D)** $\frac{-7}{8}$ **E)** $\frac{-5}{8}$
32. $\|\vec{x} + \vec{y}\| = 7$, $\|\vec{y}\| = 2$ ve $\|\vec{x} - \vec{y}\| = 3$ olduğuna göre, $\vec{x}$ vektörünün uzunluğunu bulunuz.
A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 5 **E)** 1
33. $\|\vec{x} + \vec{y}\| = 5$ ve $\|\vec{x} - \vec{y}\| = 3$ olduğuna göre, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ değeri kaçtır?
A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 5 **E)** 1
34. $\vec{x} = (0, 1, 2, 2, 2)$ ve $\vec{y} = (2, 2, 0, 2, 1)$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını bulunuz.
A) $\sqrt{101}$ **B)** $5\sqrt{10}$ **C)** $3\sqrt{10}$ **D)** $\sqrt{105}$ **E)** 10
35. Köşelerinin koordinatları $A(1, 1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3, 3)$ ve $C(1, 2, 1, 3)$ olan üçgenin alanını bulunuz.
A) $2\sqrt{5}$ **B)** $\sqrt{5}$ **C)** $2\sqrt{10}$ **D)** $\sqrt{10}$ **E)** 5
36. $\vec{x} = (1, 3)$ ve $\vec{y} = (3, 1)$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını bulunuz.
A) $2\sqrt{5}$ **B)** $2\sqrt{2}$ **C)** $\sqrt{10}$ **D)** $\sqrt{63}$ **E)** 8
37. Köşeleri $A(3, 4, 4)$, $B(1, 2, 3)$ ve $C(2, 1, 4)$ olan üçgenin B açısının kosinüsünü bulunuz.
A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **B)** $\frac{\sqrt{3}}{9}$ **C)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D)** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **E)** $\frac{\sqrt{2}}{9}$
38. Köşelerinin koordinatları $A(1, 1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3, 3)$ ve $C(3, 2, 1, 3)$ olan üçgenin çevrel çemberinin alanını bulunuz.
A) $\frac{81}{28}\pi$ **B)** $\frac{81}{14}\pi$ **C)** $\frac{27}{28}\pi$ **D)** $\frac{81}{112}\pi$ **E)** $\frac{27}{14}\pi$

39. $\vec{x} = (1, 2, 3, 4)$ vektörünün $\vec{y} = (0, 1, 1, 1)$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörü hangisidir?
A) $3\vec{y}$ **B)** $\frac{3}{2}\vec{y}$ **C)** $\frac{5}{2}\vec{y}$ **D)** $\frac{3}{10}\vec{y}$ **E)** $\frac{9}{11}\vec{y}$
40. $\vec{x} = (1, 4, 2)$, $\vec{y} = (2, 3, -1)$ olmak üzere, aşağıdaki vektörlerden hangisi $\vec{x} \times \vec{y}$ vektörüne paraleldir?
A) $(2, 3, 1)$ **B)** $(2, -1, 1)$ **C)** $(1, 0, 5)$ **D)** $(2, 1, -1)$ **E)** $(2, -1, 1)$
41. $\vec{x} = (1, 3, 2)$, $\vec{y} = (2, 3, -1)$ ise $\|\vec{x} \times \vec{y}\|$ kaçtır?
A) $\sqrt{115}$ **B)** $3\sqrt{17}$ **C)** $3\sqrt{19}$ **D)** $\sqrt{119}$ **E)** $\sqrt{117}$
42. $\vec{x} = (1, 2, 3)$ ve $\vec{y} = (2, 3, 1)$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanı kaçtır?
A) $2\sqrt{19}$ **B)** $5\sqrt{3}$ **C)** $3\sqrt{5}$ **D)** $\sqrt{19}$ **E)** $2\sqrt{17}$
43. Aşağıdakilerden hangisi $\vec{x} = (1, 2, 3)$ ve $\vec{y} = (2, 3, 1)$ vektörlerinin her ikisine de diktir?
A) $(-5, 1, 1)$ **B)** $(7, -5, 1)$ **C)** $(3, 0, -1)$ **D)** $(7, 5, -1)$ **E)** $(7, 5, 1)$
44. Aşağıdaki vektör ikililerinden hangisi $\vec{x} = (3, -1, 4)$ vektörüyle aynı düzlemde ve birbirine diktir?
A) $(-5, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$ **B)** $(1, 2, 3)$, $(-3, 0, 1)$ **C)** $(1, 1, 1)$, $(1, -3, 2)$
D) $(1, 2, 3)$, $(1, -2, 1)$ **E)** $(1, 2, 3)$, $(0, -3, 2)$
45. $\vec{x} = (1, 2, 3)$, $\vec{y} = (2, 3, 1)$ ve $\vec{z} = (2, 0, 3)$ vektörleriyle oluşturulan paralelyüzünün hacmini bulunuz.
A) 19 **B)** 17 **C)** 18 **D)** 16 **E)** 9
46. $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$, $\vec{x}$, $\vec{y}$ ve $\vec{z}$ vektörlerinin karma çarpımını göstermek üzere, $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = 2$ ise $[3\vec{x} + 2\vec{y}, 3\vec{y} + 2\vec{z}, 2\vec{z} + \vec{x}] = ?$
A) 24 **B)** 28 **C)** 14 **D)** 44 **E)** 22
47. $\vec{x} = 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{y} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$ ve $\vec{z} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3$ vektörleriyle oluşturulan paralelyüzünün hacmi kaçtır?
A) 20 **B)** 30 **C)** 25 **D)** 15 **E)** 40

48. $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$, $\vec{x}$, $\vec{y}$ ve $\vec{z}$ vektörlerinin karma çarpımını göstermek üzere, $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = 0$ ise aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri kesinlikle doğrudur?
- $\vec{x}$, $\vec{y}$ ve $\vec{z}$ lineer bağımsızdırlar.
 - $\vec{x}$, $\vec{y}$ ve $\vec{z}$ aynı düzlemde dirler.
 - $\vec{x}$, $\vec{y}$ ve $\vec{z}$ hacim oluşturmazlar.
 - $\vec{z}$ vektörü $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazılabilir.
 - $\vec{z}$ vektörü, $\vec{x}$ veya $\vec{y}$ vektörlerinden birine paraleldir.
- A) II,III ve IV B) Hepsi C) II,III,IV ve V D) II ve III E) II, III ve V
49. $A(1, 0, 1)$, $B(1, 2, 3)$, $C(2, 1, 3)$ ve $D(k, 1, 4)$ noktaları aynı düzlemde olduğuna göre k kaçtır?
- A) 2 B) 3 C) 4 D) 1 E) 0
50. $\vec{x} = (-1, 2, 3)$, $\vec{y} = (2, 3, 1)$ ve $\vec{z} = (k, 1, -3)$ vektörleri aynı düzlemde ise, $k = ?$
- A) 3 B) 1 C) 4 D) 5 E) -2
51. Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri yanlıştır?
- $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle$
 - $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$
 - $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$
 - $\vec{u} // \vec{v}$ ise $\vec{u} \times \vec{v} = 0$
 - $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$
 - $\vec{u} \neq 0$ iken $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ daima birim vektördür.
- A) Yalnız IV B) Yalnız II C) II ve IV D) II ve V E) Hiçbiri
52. $\vec{x} = (1, k, 3)$, $\vec{y} = (1, 3, k)$ ve $\vec{z} = (2, 0, 3)$ vektörleri lineer bağımlı ise k 'nın olabileceği değerlerin toplamı kaçtır?
- A) $\frac{3}{2}$ B) -3 C) 3 D) $-\frac{3}{2}$ E) -2
53. $R = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -6 & -3 & b \\ -2 & a & c \end{bmatrix}$ matrisi ortogonal matris olduğuna göre, $a + b + c = ?$
- A) 1 B) -5 C) -2 D) 3 E) -11
54. $A(1, 1, 1)$, $B(1, 3, 2)$, $C(2, 1, 2)$ ve $D(2, 3, 6)$ noktalarının oluşturduğu dört yüzlünün hacmini bulunuz.
- A) 6 B) 5 C) 2 D) 3 E) 1

UZAYDA DOĞRU DENKLEMİ

Düzlemde bir doğrunun denklemini, bir noktası ve eğimi verildiğinde kolayca bulabiliriz. Fakat, uzayda bir doğrunun denklemini bulabilmek için, bir noktanın ve doğrunun doğrultusunu ifade eden bir vektörün verilmesi gerekir. Doğrunun doğrultusunu gösteren vektöre, **doğrultu vektörü veya kısaca doğrultman** denir. Bu vektörü genel olarak $\vec{u}$ harfiyle göstereceğiz. Düzlemde doğrunun eğimi, doğrunun doğrultusunu ifade ettiği gibi, uzayda da doğrultu vektörü doğrunun doğrultusunu ifade eder. Doğru denklemindeki en önemli unsur doğrultu vektörüdür. Bazen doğrunun doğrultmanı dolaylı şekilde verilebilir. Bu bölümde, bir doğru denkleminin nasıl bulunacağını üç durumda inceleyeceğiz.

1. Bir noktası ve doğrultusu verilen doğrunun denklemi.
2. İki noktası verilen doğrunun denklemi
3. Bir noktası bilinen ve verilen iki doğrultuya dik olan doğrunun denklemi

Bir Noktası ve Doğrultusu Verilen Doğrunun Denklemi

Şekilden de görüldüğü gibi, $X(x, y, z)$ olmak üzere,

$\vec{PX} = \lambda \vec{u}$ eşitliği sağlanacağından, $\vec{u} = (a, b, c)$ için,

$$\vec{PX} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda (a, b, c)$$

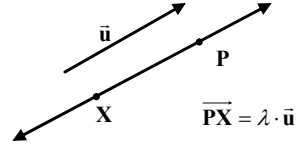
olur. Buradan da,

$$x = x_0 + a\lambda, \quad y = y_0 + b\lambda, \quad z = z_0 + c\lambda$$

elde edilir ki, bu doğrunun λ parametresine bağlı parametrik denklemdir. Bu denklemlerden de λ çekilerek,

$$\lambda = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

denklemi bulunur. Bu da, doğrunun kartezyen denklemidir.



Örnek 5.1 $P(1, 2, 0)$ noktasından geçen $\vec{u} = (2, 3, 1)$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm : $X = (x, y, z)$ olmak üzere, $\vec{PX} = \lambda \vec{u}$ eşitliğinden,

$$(x - 1, y - 2, z - 0) = \lambda (2, 3, 1)$$

yazabiliriz. Buna göre, doğrunun parametrik denklemi

$$x = 2\lambda + 1; \quad y = 3\lambda + 2; \quad z = \lambda$$

ve doğrunun kartezyen denklemi de

$$\lambda = \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z}{1}$$

olarak bulunur.

Örnek 5.2 $P(1, 2, 3)$ noktasından geçen ve $\vec{u} = (2, 0, 5)$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm : $\vec{PX} = \lambda \vec{u}$ eşitliğinden,

$$x = 2\lambda + 1, y = 0\lambda + 2 = 2, z = 5\lambda + 3$$

bulunur. Kartezyen denklemi de,

$$\frac{x-1}{2} = \frac{z-3}{5} = \lambda, y = 2$$

elde edilir.

5.1) Alıştırma $P(1, 2, 3)$ noktasından geçen ve $\vec{u} = (1, 3, 5)$ vektörüne paralel olan doğrunun parametrik ve kartezyen denklemini bulunuz.

Yanıt : $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{5} = \lambda, \{x = \lambda + 1, y = 3\lambda + 2, z = 5\lambda + 3\}$

5.2) Alıştırma $P(1, 2, 3)$ noktasından geçen ve $\vec{u} = (0, 3, 4)$ vektörüne paralel olan doğrunun parametrik ve kartezyen denklemini bulunuz.

Yanıt : $x = 1, \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} = \lambda, \{x = 1, y = 3\lambda + 2, z = 4\lambda + 3\}$.

Bir doğrunun kartezyen ya da parametrik denklemleri verildiğinde, doğrultusunu gösteren doğrultman vektörü kolayca bulunabilir.

i) Doğrunun parametrik denkleminde, parametrenin çarpıldığı sayılar, doğrultman vektörünün bileşenleridir.

ii) Doğrunun kartezyen denkleminde de katsayısı 1 olan değişkenlerin, paydasındaki değerler doğrunun doğrultu vektörünü verir. Doğru denkleminde, ayrı bir eşitlik halinde yazılan ve değeri bilinen değişken terim için doğrultman vektörünün bileşeni 0'dır.

Örnek 5.3 Aşağıdaki doğrularının doğrultman vektörlerini bulunuz.

i) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z,$

v) $\frac{x-1}{2} = \frac{1-z}{3}, y = 1,$

ii) $x = 2, \frac{y-2}{1} = \frac{2-z}{3},$

vi) $x = 3\lambda - 2, y = 2\lambda + 1, z = 4\lambda + 3,$

iii) $\frac{x-1}{2} = y - 2 = \frac{2z-1}{3},$

vii) $x = 1, y = 3\lambda + 2, z = 4\lambda + 3.$

iv) $\frac{3x-1}{2} = \frac{1-2y}{4} = \frac{1-z}{3},$

viii) $y = 2x - 1, z = 0$

Çözüm : i) $\vec{u}_1 = (2, 3, 1)$.

ii) $\vec{u}_2 = (0, 1, -3)$.

iii) $\frac{x-1}{2} = y-2 = \frac{2z-1}{3}$ eşitliğinde, z 'nin katsayısını 1 yapmak için, z 'li kesirin pay ve paydasını 2'ye bölelim.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1/2}{3/2}$$

olacağından, $\vec{u}_3 = (2, 1, 3/2)$ olur.

iv) $\vec{u}_4 = (2/3, -2, -3)$.

v) $\vec{u}_5 = (2, 0, -3)$.

Diğer iki doğru parametrik olarak verilmiş. Bu doğruların doğrultman vektörleri de, parametrenin katsayılarıdır. Buna göre,

vi) $\vec{u}_6 = (3, 2, 4)$ ve

vii) $\vec{u}_7 = (0, 3, 4)$ olur.

viii) $\vec{u}_8 = (1, 2, 0)$.

Örnek 5.4 $\alpha(t) = (5t - 2, 3t + 1, 2t - 3)$ vektör fonksiyonunun bir doğru denklemi olduğunu görünüz ve doğrultusunu bulunuz.

Çözüm : $x = 5t - 2$, $y = 3t + 1$, $z = 2t - 3$ eşitliklerinden t yalnız bırakılırsa,

$$t = \frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{2}$$

elde edilir. Doğrultmanı $\vec{u} = (5, 3, 2)$ vektörüdür.

5.3) Alıştırma Aşağıdaki doğrularının doğrultman vektörlerini bulunuz.

- i)** $\frac{x+1}{3} = y-1 = 2z$; **ii)** $x = 1$, $\frac{2y-2}{3} = \frac{1-2z}{2}$;
iii) $\frac{x-1}{2} = 2-y = \frac{3z-1}{3}$ **iv)** $y = 1$, $x = \lambda + 2$, $z = 4\lambda - 3$

Yanıt : i) $\vec{u}_1 = (3, 1, 1/2)$

ii) $\vec{u}_2 = (0, 3/2, -1)$

iii) $\vec{u}_3 = (2, -1, 1)$

iv) $\vec{u}_4 = (1, 0, 4)$.

$\mathbb{R}^n$ Uzayında Doğru Denklemi : $\mathbb{R}^3$ deki doğru denklemi $\mathbb{R}^n$ uzayına genelleştirilebilir. $\mathbf{P}$ noktasından geçen ve doğrultusu $\vec{u}$ olan doğrunun denklemi yine

$$\overrightarrow{PX} = \lambda \vec{u}$$

vektörel eşitliğinden elde edilebilir. Buna göre, $\mathbf{P}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ noktasından geçen ve doğrultu vektörü $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ olan doğrunun denklemi, $\mathbf{X}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ değişken nokta olmak üzere,

$$\frac{x_1 - p_1}{u_1} = \frac{x_2 - p_2}{u_2} = \dots = \frac{x_n - p_n}{u_n} = \lambda$$

denkleminle verilebilir.

Örnek 5.5 $\mathbf{P}(1, 2, 4, 3)$ noktasından geçen ve $\vec{u} = (2, 0, 5, 2)$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm : $\overrightarrow{PX} = \lambda \vec{u}$ eşitliği kullanılırsa, $\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ değişken nokta olmak üzere,

$$(x_1 - 1, x_2 - 2, x_3 - 4, x_4 - 3) = \lambda(2, 0, 5, 2)$$

eşitliğinden, $\frac{x_1 - 1}{2} = \frac{x_3 - 4}{5} = \frac{x_4 - 3}{2} = \lambda$, $x_2 = 2$ bulunur.

Örnek 5.6 $\mathbf{P}(1, 2)$ noktasından geçen ve $\vec{u} = (3, 5)$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm : $\overrightarrow{PX} = \lambda \vec{u}$ eşitliğinden, $\mathbf{X}(x, y)$ için, $(x - 1, y - 2) = \lambda(3, 5)$ olur. Buradan,

$$\lambda = \frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{5}$$

denklemini elde edilir.

Örnek 5.7 $\frac{x - 1}{2} = y = 1 - z = \frac{w - 2}{3}$ doğrusunun doğrultman vektörü nedir?

Çözüm : $\vec{u} = (2, 1, -1, 3)$.

Örnek 5.8 $\mathbb{R}^2$ de $y = 3x - 2$ doğrusunun doğrultman vektörü nedir?

Çözüm : Doğruyu $\frac{y}{3} = x - \frac{2}{3}$ şeklinde yazabiliriz. Buna göre, $\vec{u} = (1, 3)$ olduğu görülür.

5.4) Alıştırma $P(1, 6, 2, 4, -3)$ noktasından geçen ve $\vec{u} = (2, 0, 3, 2, 1)$ vektörüne paralel olan doğrunun parametrik ve kartezyen denklemini bulunuz.

Yanıt : Kartezyen denklemi $\frac{x_1 - 1}{2} = \frac{x_3 - 2}{3} = \frac{x_4 - 4}{2} = \frac{x_5 + 3}{1} = \lambda$, $x_2 = 6$ ve parametrik denklemi ise, $x_1 = 2\lambda + 1$, $x_2 = 6$, $x_3 = 3\lambda + 2$, $x_4 = 2\lambda + 4$, $x_5 = \lambda - 3$.

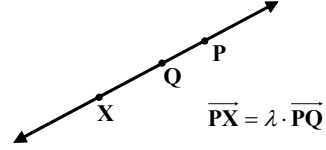
5.5) Alıştırma $\frac{x_1 - 1}{2} = \frac{2 - x_2}{3} = \frac{3x_4 - 1}{4} = \frac{2x_5 + 3}{4} = \lambda$, $x_3 = 6$ doğrusunun doğrultu vektörünü bulunuz.

Yanıt : $\vec{u} = (2, -3, 0, 4/3, 2)$.

İki Noktası Verilen Doğrunun Denklemi

Doğru üzerindeki iki nokta verildiğinde, doğrunun denklemini bulmak mümkündür. Bu iki noktanın oluşturduğu vektör, doğrunun doğrultusu olacağından, $\vec{u} = \vec{PQ}$ alınabilir. Böylece, doğrultusunu ve bir noktasını bildiğimiz bu doğrunun denklemini bulabiliriz.

Buna göre, $P(x_0, y_0, z_0)$ ve $Q(x_1, y_1, z_1)$ noktasından geçen doğrunun denklemini bulalım.



$$\vec{u} = \vec{PQ} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

doğrultu vektörü olduğundan, $P(x_0, y_0, z_0)$ 'dan geçen ve doğrultusu $\vec{u}$ olan doğrunun denklemi,

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

elde edilir. Bu denklem yine $\mathbb{R}^n$ uzayı için genelleştirilebilir.

Örnek 5.9 $P(1, 2, 0)$ ve $Q(2, 3, 4)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm : $\vec{u} = \vec{PQ} = Q - P = (1, 1, 4)$ olduğundan, doğru denklemi

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 0}{4}$$

bulunur.

Örnek 5.10 $A(1, 1, 2)$ ve $B(2, 3, 1)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm : $\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{3-1} = \frac{z-2}{1-2}$ eşitliğinden $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1} = \lambda$ olur.

5.6) Alıştırma $A(0, 1, 2)$ ve $B(2, 4, 4)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

Yanıt : $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{2}$.

5.7) Alıştırma $A(5, 1, 2)$ ve $B(5, 4, 4)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

Yanıt : $x = 5, \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{2}$.

5.8) Alıştırma $\mathbb{R}^n$ uzayında $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ ve $Q(q_1, q_2, \dots, q_n)$ noktalarından geçen doğrunun denkleminin, $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ değişken nokta olmak üzere,

$$\frac{x_1 - q_1}{p_1 - q_1} = \frac{x_2 - q_2}{p_2 - q_2} = \dots = \frac{x_n - q_n}{p_n - q_n}$$

olduğunu gösteriniz.

5.9) Alıştırma $\mathbb{R}^4$ uzayında $A(1, 0, 1, -2)$ ve $B(2, 4, 3, 4)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

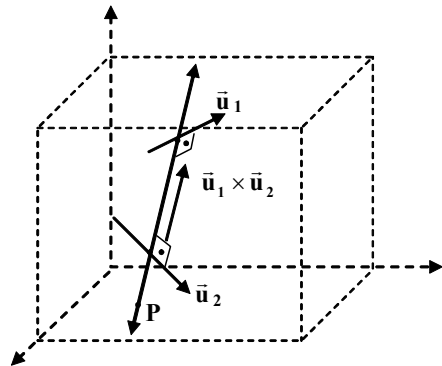
Yanıt : $\frac{x_1 - 1}{1} = \frac{x_2}{4} = \frac{x_3 - 1}{2} = \frac{x_4 + 2}{6}$.

Bir Noktası Bilinen ve İki Vektöre Dik Olan Doğrunun Denklemi

Herhangi iki vektöre dik olan bir doğrunun doğrultu vektörünü, verilen vektörlerin vektörel çarpımını alarak bulabiliriz. Şekilde, iki vektöre dik olan bir doğru gösterilmiştir. Bu doğrunun doğrultu vektörü,

$$\vec{u} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$$

dir. Buna göre, P noktası ve $\vec{u}$ doğrultusu bilinen doğru denkleminde, doğrunun denklemini bulabiliriz.



Örnek 5.11 $\vec{u}_1 = (1, 2, 2)$ ve $\vec{u}_2 = (2, 3, 0)$ vektörlerine dik olan ve $P(1, 0, 2)$ noktasından geçen doğru denklemini bulunuz.

Çözüm : İstenen doğrunun doğrultu vektörü, $\vec{u} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ eşitliğinden,

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = (-6, 4, -1)$$

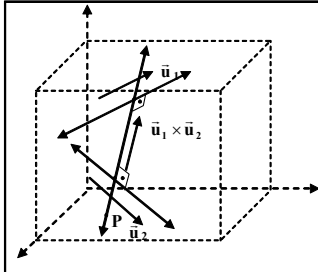
olacaktır. Buna göre, $P(1, 0, 2)$ noktasından geçtiğine göre, doğrunun denklemi

$$\frac{x-1}{-6} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{-1}$$

bulunur.

5.10) Alıştırma $\vec{u}_1 = (2, 3, 1)$ ve $\vec{u}_2 = (4, 1, 2)$ vektörlerine dik olan ve $P(1, 1, 1)$ noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

Yanıt : $x-1 = \frac{1-z}{2}, y=1$.



Yukarıdakine benzer düşünceyle, iki doğruya dik olan ve bir noktası bilinen doğru denklemini bulabiliriz. Bunun için verilen iki doğrunun doğrultman vektörleri kullanılır. Yeni doğrunun doğrultman vektörü, verilen iki doğrunun doğrultman vektörlerinin vektörel çarpımıdır.

Örnek 5.12 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$ ve $x=2, y-2 = \frac{2-z}{2}$ doğrularına dik olan ve $P(1, 2, 3)$ noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm : Doğruların doğrultu vektörleri, $\vec{u}_1 = (2, 3, 1)$ ve $\vec{u}_2 = (0, 1, -2)$ olduğundan, istenen doğrunun doğrultu vektörü, $\vec{u} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ eşitliğinden,

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-7, 4, 2)$$

bulunur. Buna göre, istenen doğrunun denklemi,

$$\frac{x-1}{-7} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{2}$$

bulunur.

Örnek 5.13 $\frac{x-1}{2} = \frac{z-2}{3}$, $y=1$ ve $\frac{x}{2} = y = z$ doğrularına dik olan ve $P(1,1,2)$ noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz

Çözüm : $\vec{u} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ istenen doğrunun doğrultman vektörüdür.

$$\vec{u} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (-3, 4, 2)$$

olduğundan, $P(1,1,2)$ den geçen doğrunun denklemi

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{2}$$

olur.

5.11) Alıştırma $\vec{x} = (5, 1, 2)$ ve $\vec{y} = (4, 3, 2)$ vektörlerine dik olan ve $P(1, 1, 1)$ noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

Yanıt : $\frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{11}$.

5.12) Alıştırma $\frac{x-2}{2} = \frac{2z-3}{2}$, $y=1$ ve $\frac{x}{2} = \frac{1-y}{1} = \frac{z}{1}$ doğrularına dik olan ve $P(0, 1, 2)$ noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz

Yanıt : $y=1$, $\frac{x-0}{1} = \frac{z-2}{-2}$.

5.13) Alıştırma $\frac{2x-1}{2} = \frac{2y-3}{2}$, $z=2$ ve $\frac{x}{2} = \frac{1-y}{2} = z$ doğrularına dik olan ve $P(0, 1, 2)$ noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz

Yanıt : $x=1-y = \frac{2-z}{4}$.

$\mathbb{R}^3$ Uzayında İki Doğrunun Birbirine Göre Durumları

Uzayda iki doğrunun birbirine göre beş durumu vardır.

1. Paralel olabilirler. (Aynı düzlemde dirler.)
2. Dik Olabilirler (Aynı düzlemde olmaları gerekmez)
3. Çakışık Olabilirler (Aynı doğrudurlar)
4. Kesişirler. (Aynı düzlemde dirler.)
5. Aykırı doğrulardır. (Farklı düzlemde dirler.)

Doğrultman vektörü, doğrunun doğrultusunu belirttiğinden, iki doğrunun birbirine göre durumlarını doğrultman vektör yardımıyla inceleyebiliriz. Buna göre,

$$(d_1) : \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1} \text{ ve } (d_2) : \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$$

doğruları verilsin. Bu doğruların doğrultman vektörleri sırasıyla,

$$\vec{u}_1 = (a_1, b_1, c_1) \text{ ve } \vec{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$$

'dir. Şimdi, bu doğruların birbirine göre durumlarını, bu doğrultman vektörler yardımıyla inceleyelim.

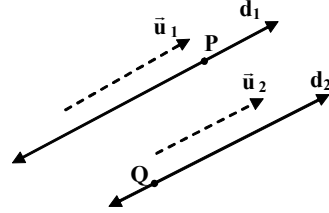
1. İki Doğrunun Paralel Olması

Bu durumda, $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$ olacağından,

$\vec{u}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ve $\vec{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ için,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

olacaktır.



Örnek 5.14 $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z$ ve $\frac{2x-1}{3} = \frac{2y-1}{2} = \frac{z}{k}$ doğruları paralel ise, k kaçtır?

Çözüm : $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$ paralel olmalıdır. Buna göre,

$$\frac{3}{3/2} = \frac{2}{1} = \frac{1}{k}$$

eşitliğinden, $k = 1/2$ bulunur.

Örnek 5.15 Parametrik denklemi, $\{x = 2t + 1, y = 3t - 1, z = 5t\}$ olan doğruya paralel olan ve $P(2, 1, 0)$ noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm : Doğrunun doğrultman vektörü $\vec{u} = (2, 3, 5)$ olacağından,

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{5}$$

elde edilir.

2. İki Doğrunun Birbirine Dik Olması

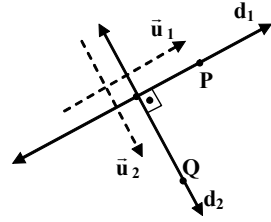
İki doğrunun dik olması için, doğrultu vektörleri dik olmalıdır. Buna göre, $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$ olacağından,

$$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = 0$$

ve dolayısıyla $\vec{u}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ve $\vec{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ için

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

olacaktır.



Örnek 5.16 $\frac{x-1}{3} = \frac{1-y}{2}, z=2$ doğrusu, $\frac{x+1}{2} = \frac{z-2}{3} = \frac{y-2}{m}$ doğrusuna dik ise $m = ?$

Çözüm : $\vec{u}_1 = (3, -2, 0)$, $\vec{u}_2 = (2, m, 3)$ vektörleri birbirine dik olmalı.

$$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow 6 - 2m + 0 = 0$$

eşitliğinden $m = 3$ bulunur.

Örnek 5.17 $x = 2y - 1$ doğrusu ile $y = kx - 2$ doğrusu birbirine dik ise k kaçtır?

Çözüm : Klasik yöntemle göre, düzlemdeki dik iki doğru için $m_1 \cdot m_2 = -1$ olduğunu biliyoruz. Buna göre, $m_1 = \frac{1}{2}$ olduğundan, $m_2 = k = -2$ bulunur. Doğrultman vektörlerle de aynı sonucu bulalım. $\vec{u}_1 = (1, 1/2)$, $\vec{u}_2 = (1/k, 1)$ vektörleri birbirine dik olmalı. Buna göre,

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{2} = 0$$

eşitliğinden de $k = -2$ bulunur.

5.14) Alıştırma $\frac{2x-1}{m} = \frac{2y-3}{2}, z=2$ ve $\frac{-x}{2} = \frac{1+y}{2} = z$ doğruları birbirine dik ise $m = ?$

Yanıt : $m = 2$.

5.15) Alıştırma $\frac{2x-1}{3k} = y-3, z=2$ ve $\frac{2x}{3} = \frac{1+y}{m} = z$ doğruları birbirine dik ise m 'yi k cinsinden bulunuz.

Yanıt : $m = \frac{-9}{4}k$.

5.16) Alıştırma $\mathbb{R}^4$ uzayında $\frac{x-1}{3} = y-3 = z = w-1$ ve $\frac{x}{2} = \frac{y}{m} = z = \frac{w}{2}$ doğruları birbirine dik ise m kaçtır?

Yanıt : $m = -9$.

3. İki Doğrunun Çakışık Olması

İki doğrunun denklemleri bazen farklı görünse de, aynı doğruyu ifade ediyor olabilirler. Böyle doğrulara **çakışık doğrular** denir. Örneğin,

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = z \quad \text{ve} \quad x - 1 = y - 1 = 2z - 1$$

doğrularının her ikisi de aynı doğruyu ifade ederler. İki doğrunun çakışık olduğunu, doğrultmanlarının paralel olduğunu ve bir ortak noktalarını bularak gösterebiliriz. Yukarıda verilen iki doğrunun doğrultmanları paraleldir ve $P(2, 2, 1)$ noktasının her iki doğruyu da sağladığı kolayca görülebilir. Her iki doğruyu da sağlayan sonsuz sayıda nokta bulunabilir.

$$d_1 \text{ ve } d_2 \text{ doğruları çakışık} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) Doğrultmanları paralel } (\vec{u}_1 // \vec{u}_2) \\ \text{ii) Ortak noktaları vardır.} \end{cases}$$

Örnek 5.18 $\frac{x-2}{3} = y = 1 - z$ ve $\frac{2x-1}{6} = \frac{y-k}{m} = \frac{s-3z}{n}$ doğruları çakışık ise $k + m + n + s = ?$

Çözüm : Öncelikle, doğrultman vektörleri aynı olmalı. Buna göre, $m = 1$ ve $n = 3$ olur. Şimdi, ilk doğruyu sağlayan $(2, 0, 1)$ noktasını ikinci doğruya yerine yazarsak,

$$\frac{4-1}{6} = \frac{0-k}{1} = \frac{s-3}{3}$$

eşitliğinden, $k = -1/2$ ve $s = 9/2$ bulunur. O halde, $k + m + n + s = 8$ olur

5.17) Alıştırma Denklemleri farklı görünen, çakışık iki doğru yazınız.

Örnek 5.19 Analitik Geometri sınavında uzayda doğru konusunda sorulan bir sorunun yanıtını,

★ Alp : $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z}{2};$

★ Berk : $\frac{x-3}{2} = y - 1 = \frac{z-2}{2};$

★ Cem : $\frac{x-4}{2} = y - 2 = \frac{z-3}{2};$

★ Deniz : $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{4};$

olarak buluyor. Üçü tam puan alırken, birisi puan alamıyor. Buna göre, soruyu kim hatalı çözmüştür?

Çözüm : Soruya göre, doğruların üçü aynı, birisi ise farklı demektir. O halde, hangi doğrunun farklı olduğunu bulmalıyız. İki doğrunun aynı doğru olması için, doğrultmanları paralel olması ve ortak noktaları olması gerekir. Alp, Berk, Cem ve Deniz'in doğrularının herbirinin doğrultmanı birbirine paraleldir. O halde, doğruların birisinin noktaları farklıdır. Alp'in bulunduğu doğrunun bir noktasını alalım : $P(1, 0, 0)$. Bu noktayı diğer doğrulardan hangisinin sağladığını bulalım.

$$\frac{1-3}{2} = 0-1 = \frac{0-2}{2} = -1$$

olduğundan, Berk'in bulunduğu doğru P noktasından geçer.

$$\frac{1-4}{2} \neq 0-2 \neq \frac{0-3}{2}$$

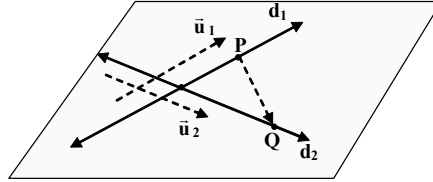
olduğundan, Cem'in bulunduğu doğru P noktasından geçmez.

$$\frac{1-5}{4} = \frac{0-2}{2} = \frac{0-4}{4} = -1$$

olduğundan, Deniz'in bulunduğu doğru P noktasından geçer. O halde, Cem soruyu hatalı çözen öğrencidir. Diğer üç öğrencinin doğruları aynı doğruyu göstermektedir.

4. İki Doğrunun Kesişmesi (İki doğrunun aynı düzlemde olma koşulu)

İki doğru paralel olmaması ve aynı düzlemde yer almaları durumunda kesişirler. Aynı düzlemde bulunmayan iki doğrunun kesişmesi mümkün değildir. Eğer, iki doğru kesişiyorsa mutlaka aynı düzlemde yer alırlar. Öncelikle, verilen iki d_1 ve d_2 doğrusunun aynı düzlemde olma koşulunu bulalım.



Herhangi iki d_1 ve d_2 doğrularının aynı düzlemde olması için, düzlem üzerinde seçilecek üç vektörün lineer bağımlılığı, dolayısıyla determinantlarının sıfır olması koşulu kullanılabilir. Seçilecek iki vektör zaten açıktır. Bunlar doğruların doğrultman vektörleri olan $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ vektörleridir. Üçüncü vektör olarak, her iki doğru üzerinde alınacak P ve Q noktalarını birleştiren $\overrightarrow{PQ}$ vektörü alınabilir. Böylece, d_1 ve d_2 doğrularının kesişme koşulu :

$$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{PQ}) = 0 \text{ ve } \vec{u}_1 \nparallel \vec{u}_2,$$

olarak ifade edilebilir. Bu koşul sadece $\mathbb{R}^3$ uzayında geçerlidir.

$$\left\{ \begin{array}{l} P' \text{den geçen } d_1 \text{ ve } Q' \text{dan} \\ \text{geçen } d_2 \text{ doğruları kesişir} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \vec{u}_1 \nparallel \vec{u}_2 \\ \text{ii) } \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{PQ}) = 0 \end{array} \right.$$

Örnek 5.20 a) $\frac{x-1}{2} = z, y = 1$ ve $x-2 = \frac{2-y}{k}, z = 1$ doğrularının kesişmesi için k kaç olmalıdır?

b) Bu doğruların kesişme noktasını bulunuz.

Çözüm : a) $\vec{u}_1 = (2, 0, 1), \vec{u}_2 = (1, -k, 0), P(1, 1, 0)$ ve $Q(2, 2, 1)$ için,

$$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{PQ}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -k & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - k = 0$$

eşitliğinden $k = 1$ elde edilir.

b) Kesişme noktasını bulmak için denklemleri ortak çözelim. İki denkleme göre, $y = 1$ ve $z = 1$ 'dir. Buna göre, $x = 3$ olur. Kesişme noktaları $K(3, 1, 1)$ olur.

Örnek 5.21 $\mathbb{R}^4$ uzayında verilen $\frac{x-1}{2} = y-3 = \frac{z+1}{k} = \frac{5-w}{2}$ doğrusu ile $\frac{x-2}{m} = \frac{y-2}{2} = z-2 = \frac{w}{3}$ doğrusunun kesişim noktasını bulunuz. k ve m kaçtır?

Çözüm : Her iki denklemde de, doğrultman vektör bileşeni verilmiş olan değişkenler y ve w olduğundan, doğru denklemlerinin

$$y-3 = \frac{5-w}{2} \text{ ve } \frac{y-2}{2} = \frac{w}{3}$$

kısımlarını kullanarak y ve w bulunabilir. Buradan,

$$\begin{cases} 2y + w = 11 \\ 3y - 2w = 6 \end{cases}$$

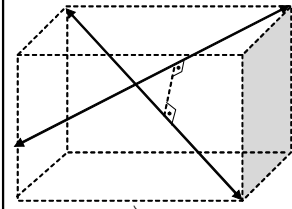
denklem sisteminden $w = 3$ ve $y = 4$ bulunur. Böylece, $x = 3$ ve $m = 1; z = 3$ ve $k = 4$ bulunur. Kesişim noktası ise, $(x, y, z, w) = (3, 4, 3, 3)$ olur.

5.18) Alıştırma $\frac{2x-1}{4} = \frac{y-3}{k}, z = 2$ ve $\frac{2-x}{3} = \frac{1+y}{2} = z-1$ doğruları kesişiyorsa k nedir?

Yanıt : $k = \frac{8}{3}$.

5.19) Alıştırma $\frac{x-1}{4} = \frac{2y-3}{k} = z$ ve $\frac{2-x}{2} = \frac{1+y}{3} = \frac{z-1}{2}$ doğrularının kesişim noktasını bulunuz?

Yanıt : $(13/5, -19/10, 2/5)$.

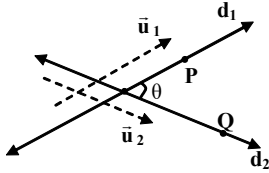


5. Paralel Olmayan İki Doğrunun Kesişmemesi (Aykırı Doğrular)

Eğer iki doğru aynı düzlemde yer almıyorsa, bu doğrulara **aykırı doğrular** denir. Şekilde aykırı doğruların anlaşılması açısından, küpün içinde kesişmeyen iki farklı doğru çizilerek gösterilmiştir. Doğrultman vektörleri $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ olan ve $\vec{PQ}$ vektörü, iki doğru üzerinde alınacak P ve Q noktalarını birleştiren vektör olmak üzere $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{PQ}) \neq 0$ ise, doğrular aykırı doğrulardır.

5.20) Alıştırma $\frac{x}{4} = \frac{y}{2} = z$ ve $\frac{1-x}{3} = \frac{1+y}{2} = z-1$ doğrularının aykırı doğrular olduğunu gösteriniz.

İki Doğru Arasındaki Aç



İki doğru arasındaki açı, doğruların doğrultman vektörleri arasındaki açıdır. İki doğrunun arasındaki açı sorulduğunda, bu doğruların kesişmesi gerekmez. İki doğrultman arasındaki açıyı iç çarpımla bulabileceğimiz için boyut önemli değildir. Her boyutta,

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle}{\|\vec{u}_1\| \|\vec{u}_2\|}$$

olduğunu kullanarak, iki doğru arasındaki açı bulunabilir.

Örnek 5.22 $\frac{x-1}{2} = z, y=1$ ve $x-2 = \frac{2-y}{2}, z=0$ doğruları arasındaki açının kosinüsünü bulunuz.

Çözüm : $\vec{u}_1 = (2, 0, 1)$ ve $\vec{u}_2 = (1, -2, 0)$ olduğundan,

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle}{\|\vec{u}_1\| \|\vec{u}_2\|} = \frac{2+0+0}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{2}{5}$$

bulunur.

5.21) Alıştırma $\mathbb{R}^3$ uzayında, $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = z$ ve $\frac{1-x}{2} = 1+y = \frac{z-1}{2}$ doğruları arasındaki açının kosinüsünü bulunuz.

Yanıt : $\pi/2$.

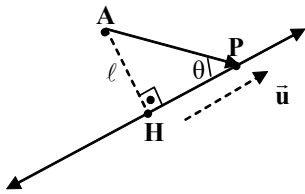
Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

Bir noktanın bir doğruya uzaklığını önce en genel halde bulalım. Yani, $\mathbb{R}^n$ uzayında nasıl bulunacağını görelim.

5.1 ★ Teorem $\mathbb{R}^n$ uzayında bir A noktasının, P noktasından geçen ve doğrultusu $\vec{u}$ olan doğruya uzaklığı

$$\ell = \frac{\sqrt{\|\vec{AP}\|^2 \|\vec{u}\|^2 - \langle \vec{AP}, \vec{u} \rangle^2}}{\|\vec{u}\|}$$

dir:



Kanıt : θ açısı, $\vec{u}$ vektörüyle $\vec{AP}$ vektörü arasındaki açı olsun. Buna göre,

$$\ell = \|\vec{AP}\| \sin \theta$$

olacaktır.

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{\langle \vec{AP}, \vec{u} \rangle^2}{\|\vec{AP}\|^2 \|\vec{u}\|^2}} \\ &= \frac{1}{\|\vec{AP}\| \|\vec{u}\|} \sqrt{\|\vec{AP}\|^2 \|\vec{u}\|^2 - \langle \vec{AP}, \vec{u} \rangle^2} \end{aligned}$$

olduğu kullanılırsa,

$$\ell = \frac{\sqrt{\|\vec{AP}\|^2 \|\vec{u}\|^2 - \langle \vec{AP}, \vec{u} \rangle^2}}{\|\vec{u}\|}$$

elde edilir. ■

Not ! Daha önce

$$\sqrt{\|\vec{AP}\|^2 \|\vec{u}\|^2 - \langle \vec{AP}, \vec{u} \rangle^2}$$

ifadesinin $\vec{AP}$ ve $\vec{u}$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını verdiğini göstermiştik. $\|\vec{u}\|$ ise taban uzunluğunu ifade etmektedir. Buna göre yukarıdaki teoremlle ifade ettiğimiz formül

$$\ell = \frac{\text{Alan}}{\text{Taban}}$$

bağıntısının doğal bir sonucudur. Alanın, tabana oranı bize yükseliği yani, en kısa uzaklığı verecektir.

Örnek 5.23 $\mathbb{R}^4$ uzayında, $A(1, 1, 2, 1)$ noktasının $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z=w$ doğrusuna uzaklığını bulunuz.

Çözüm : $P(1, 1, 0, 0)$, $\vec{u} = (2, 3, 1, 1)$ ve $\overrightarrow{AP} = (0, 0, -2, -1)$ 'dir.

$$\text{Alan}(\overrightarrow{AP}, \vec{u}) = \sqrt{(\sqrt{5})^2(\sqrt{15})^2 - (-3)^2} = \sqrt{66} \text{ ve } T_{aban} = \|\vec{u}\| = \sqrt{15}$$

olduğundan,

$$\ell = \frac{\text{Alan}}{T_{aban}} = \frac{\sqrt{66}}{\sqrt{15}}$$

bulunur.

Örnek 5.24 $\mathbb{R}^3$ uzayında, $A(1, 1, 2)$ noktasının $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3}, z=1$ doğrusuna uzaklığını bulunuz.

Çözüm : $P(1, 0, 1)$, $\vec{u} = (2, 3, 0)$ ve $\overrightarrow{AP} = (0, -1, -1)$ 'dir.

$$\text{Alan}(\overrightarrow{AP}, \vec{u}) = \sqrt{2 \cdot 13 - (-3)^2} = 2\sqrt{2} \text{ ve } T_{aban} = \|\vec{u}\| = \sqrt{13}$$

olduğundan,

$$\ell = \frac{\text{Alan}}{T_{aban}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$$

bulunur.

Örnek 5.25 $\mathbb{R}^2$ uzayında, $A(1, 2)$ noktasının $y = 2x - 3$ doğrusuna uzaklığını bulunuz.

Çözüm : $P(0, -3)$ alınabilir. $\frac{y-3}{2} = x$ olduğundan, $\vec{u} = (1, 2)$ ve $\overrightarrow{AP} = (-1, -5)$ olur. Buna göre,

$$\ell = \frac{\sqrt{26 \cdot 5 - 11^2}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

elde edilir. Ayrıca, liseden de iyi bildiğimiz $\ell = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ formülüyle de,

$$\ell = \frac{|2 - 2 \cdot 1 + 3|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

olduğu görülebilir.

5.22) Alıştırma $\mathbb{R}^2$ uzayında, $A(1, 1)$ noktasının $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1}$ doğrusuna uzaklığını bulunuz.

Yanıt : $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

5.23) Alıştırma $\mathbb{R}^3$ uzayında, $A(1, 1, 1)$ noktasının $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$ doğrusuna uzaklığını bulunuz.

Yanıt : $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}}$.

5.24) Alıştırma $\mathbb{R}^4$ uzayında, $A(1, 1, 1, 1)$ noktasının $\frac{x}{2} = y - 1 = z = w$ doğrusuna uzaklığını bulunuz.

Yanıt : $\sqrt{35}/7$.

5.2 ★ **Teorem** Düzlemde bir $A(x_0, y_0)$ noktasının $ax + by + c = 0$ doğrusuna uzaklığı

$$\ell = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

'dir.

Kanıt : 1. Yol (Vektörel) $ax + by + c = 0$ eşitliğini ab ile bölersek,

$$\frac{x}{-b} = \frac{y}{a} + \frac{c}{ab} \text{ veya } \frac{x}{-b} = \frac{y + c/b}{a}$$

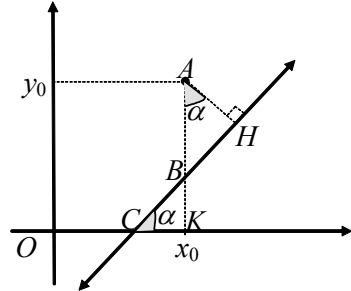
şeklinde yazabiliriz. Buna göre, doğrunun doğrultman vektörü $\vec{u} = (-b, a)$, bir noktası da $P(0, -c/b)$ 'dir. $\vec{AP} = (-x_0, -c/b - y_0)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{\sqrt{\left((-x_0)^2 + (c/b + y_0)^2\right)(a^2 + b^2) - (bx_0 - ac/b - ay_0)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2x_0^2 + 2abx_0y_0 + 2acx_0 + b^2y_0^2 + 2bcy_0 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(ax_0 + by_0 + c)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

2. Yol (Klasik) Şekilden takip edilirse,
 $\ell = |AH| = |AB| \cos \alpha$ dir. Diğer yandan, B noktasının koordinatları $B(x_0, \frac{-ax_0 - c}{b})$ 'dir. Buna göre,

$$\begin{aligned} |AB| &= |AK| - |BK| = y_0 - \frac{-ax_0 - c}{b} \\ &= \frac{ax_0 + by_0 + c}{b} \end{aligned}$$



olur. Doğrunun eğiminin $m = \tan \alpha = \frac{-a}{b}$ olduğu kullanılırsa

$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ bulunur. Sonuç olarak,

$$\ell = |AH| = |AB| \cos \alpha = \frac{ax_0 + by_0 + c}{b} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c + ax_0 + by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

elde edilir. ■

Not : Uzaklık formülünü, $\mathbb{R}^3$ uzayında aşağıdaki gibi ifade edebiliriz. Bu kez açının hesaplanmasında, iç çarpım yerine vektörel çarpım kullanıyoruz. Aşağıdaki formülün sadece $\mathbb{R}^3$ uzayında geçerli olduğunu unutmayınız.

5.3 ★ **Teorem** $\mathbb{R}^3$ de, bir A noktasının P noktasından geçen ve doğrultusu $\vec{u}$ olan doğruya uzaklığı

$$\ell = \frac{\|\vec{AP} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

'dır.

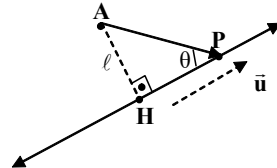
Kanıt : θ , $\vec{AP}$ ile $\vec{u}$ doğrultman vektörü arasındaki açıyı göstermek üzere,

$$\ell = \|\vec{AP}\| \sin \theta$$

olacaktır. $\|\vec{AP} \times \vec{u}\| = \|\vec{AP}\| \|\vec{u}\| \sin \theta$ eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\ell = \|\vec{AP}\| \frac{\|\vec{AP} \times \vec{u}\|}{\|\vec{AP}\| \|\vec{u}\|} = \frac{\|\vec{AP} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

bulunur. ■



Örnek 5.26 $A(2, 1, 2)$ noktasının $\frac{2-x}{2} = \frac{y-2}{2} = z$ doğrusuna olan uzaklığını bulunuz.

Çözüm : $A(2, 1, 2)$, $P(2, 2, 0)$ ise, $\overrightarrow{AP} = (0, 1, -2)$ ve $\vec{u} = (-2, 2, 1)$ olduğundan,

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (5, 4, 2)$$

ve

$$\|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\| = \sqrt{25 + 16 + 4} = 3\sqrt{5}$$

elde edilir. Böylece, $\ell = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{3\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$ olur.

5.25) Alıştırma $\mathbb{R}^3$ uzayında, $A(1, 1, 1)$ noktasının $\frac{x-2}{2} = y-1 = \frac{z-3}{2}$ doğrusuna uzaklığını bulunuz.

Yanıt : 1.

Aykırı İki Doğru Arasındaki Uzaklık

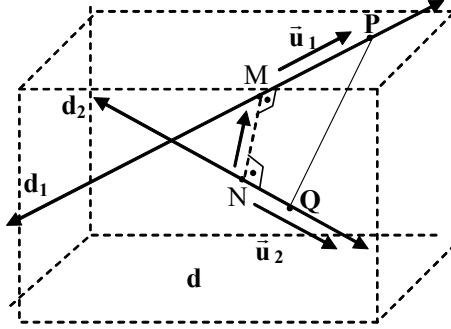
Aykırı iki doğru arasındaki uzaklık denilince, bu iki doğrunun arasındaki en kısa uzaklık anlaşılır. Şimdi, aykırı iki doğru arasındaki en kısa uzaklığı veren formülü bulalım.

5.4 ★ Teorem $\mathbb{R}^3$ de, P noktasından geçen ve doğrultusu $\vec{u}_1$ olan doğru ile, Q noktasından geçen ve doğrultusu $\vec{u}_2$ olan doğru arasındaki en kısa uzaklık

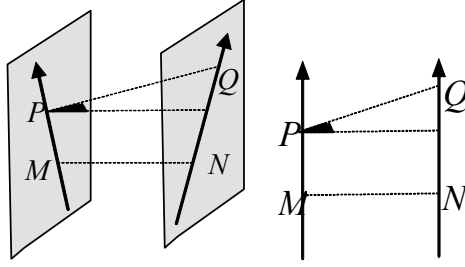
$$\ell = \frac{|\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{PQ})|}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|}$$

'dir.

Kanıt : Doğrular üzerinde M ve N gibi öyle iki koordinat bulunabilir ki, $[MN]$ doğru parçası her iki doğruya da diktir. $[MN]$ doğru parçasının uzunluğu, bize en kısa uzaklığı verir. MN doğrultusundaki vektör $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ vektörüdür. Çünkü, hem $\vec{u}_1$, hem de $\vec{u}_2$ vektörüne dik olduğundan, MN 'nin doğrultusu $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ olacaktır.



Yukarıdaki gibi çizdiğimiz ayırık iki doğruya bakış açısını değiştirerek, aşağıdaki gibi görmek daima mümkündür.



Buna göre, $|\overrightarrow{MN}| = \ell$ denilirse, $\ell = \|\overrightarrow{PQ}\| \cos \theta$ yazılabilir. Buradan, MN doğrultusundaki vektörün $\overrightarrow{u}_1 \times \overrightarrow{u}_2$ olduğu kullanılarak,

$$\ell = \|\overrightarrow{PQ}\| \cdot \cos \theta = \|\overrightarrow{PQ}\| \cdot \frac{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u}_1 \times \overrightarrow{u}_2 \rangle}{\|\overrightarrow{PQ}\| \|\overrightarrow{u}_1 \times \overrightarrow{u}_2\|} = \frac{|\det(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{PQ})|}{\|\overrightarrow{u}_1 \times \overrightarrow{u}_2\|}$$

bulunur. ■

Not ! Daha önce

$$|\det(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{PQ})|$$

ifadesinin $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{PQ}$ vektörleriyle oluşturulan paralelyüzünün hacmini verdiğini göstermiştik. $\|\overrightarrow{u}_1 \times \overrightarrow{u}_2\|$ ise taban alanını ifade etmektedir. Buna göre yukarıdaki teoremle ifade ettiğimiz formül

$$\ell = \frac{\text{Hacim}}{\text{Taban Alanı}}$$

bağıntısının doğal bir sonucudur. Hacimin, taban alanına oranı bize yükseliği yani, en kısa uzaklığı verecektir.

Örnek 5.27 $\frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{3} = \frac{z+1}{2}$ ve $x-2 = \frac{z-2}{3}$, $y=1$ doğruları arasındaki en kısa uzaklığı bulunuz.

Çözüm : $\vec{u}_1 = (2, -3, 2)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 3)$, $P(1, 1, -1)$, $Q(2, 1, 2)$ olduğuna göre $\vec{PQ} = (1, 0, 3)$ olur. Buradan,

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-9, -4, 3)$$

olur. Böylece,

$$\ell = \frac{\langle (1, 0, 3), (-9, -4, 3) \rangle}{\sqrt{81 + 16 + 9}} = 0$$

eşitliğinden, $\ell = 0$ olarak bulunur. Yani, verilen iki doğru kesişmektedirler.

Örnek 5.28 $\frac{2x-1}{4} = \frac{1-y}{2} = z+1$ ve $\frac{2x-1}{2} = \frac{z-2}{3}$, $y=3$ doğruları arasındaki en kısa uzaklığı bulunuz.

Çözüm : $\vec{u}_1 = (2, -2, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 3)$, $P(1/2, 1, -1)$, $Q(1/2, 3, 2)$ olduğuna göre $\vec{PQ} = (0, 2, 3)$ olur. Buradan,

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-6, -5, 2)$$

olur. Böylece,

$$\ell = \frac{|\langle (0, 2, 3), (-6, -5, 2) \rangle|}{\sqrt{36 + 25 + 4}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

olarak bulunur.

5.26) Alıştırma $\frac{x-1}{2} = 1-y$, $z=1$ ve $x-1 = z-2$, $y=3$ doğruları arasındaki en kısa uzaklığı bulunuz.

Yanıt : $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

5.27) Alıştırma $\frac{x-1}{2} = z$, $y=1$ ve $y-1 = \frac{z-2}{2}$, $x=3$ doğruları arasındaki en kısa uzaklığı bulunuz.

Yanıt : $\frac{2}{\sqrt{21}}$.

Dikme Ayaklarının Bulunması (En Yakın Koordinatların Belirlenmesi)

5.5 ★ **Teorem** $\mathbb{R}^3$ de, P noktasından geçen, doğrultusu $\vec{u}_1$ olan ve Q noktasından geçen, doğrultusu $\vec{u}_2$ olan doğruların birbirlerine en yakın oldukları noktaların koordinatları :

$$k_1 = \frac{\langle \vec{PQ} \times \vec{u}_2, \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 \rangle}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|^2} \text{ ve } k_2 = \frac{\langle \vec{PQ} \times \vec{u}_1, \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 \rangle}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|^2}$$

olmak üzere, sırasıyla,

$$M = P + k_1 \vec{u}_1$$

$$N = Q + k_2 \vec{u}_2$$

dir.

Kanıt : Dikme ayaklarının, yani ayırık iki doğrunun birbirine en yakın olan noktalarının koordinatlarını yine vektörel hesaplamalarla elde edebiliriz. Öncelikle, $\vec{MN}$ vektörünü $\vec{u}_1$ ve $\vec{u}_2$ türünden yazmaya çalışalım.

Şekilden de takip edilirse,

$$\vec{MN} = \vec{MP} + \vec{PQ} + \vec{QN}$$

yazılabilir.

$$\vec{MP} = -k_1 \vec{u}_1 \text{ ve } \vec{QN} = -k_2 \vec{u}_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

olsun. Bu durumda,

$$\vec{MN} + k_1 \vec{u}_1 + k_2 \vec{u}_2 = \vec{PQ}$$

olacaktır. Şimdi, $\vec{MN}$ vektörünü, sırasıyla $\vec{u}_1$ ve $\vec{u}_2$ vektörleriyle çarpıp, $\vec{MN} \perp \vec{u}_1$ ve $\vec{MN} \perp \vec{u}_2$ olduğunu kullanırsak

$$k_1 \langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle + k_2 \langle \vec{u}_2, \vec{u}_1 \rangle = \langle \vec{PQ}, \vec{u}_1 \rangle$$

$$k_1 \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle + k_2 \langle \vec{u}_2, \vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{PQ}, \vec{u}_2 \rangle$$

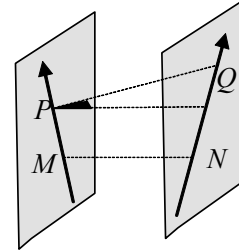
denklem sistemi elde edilir. Cramer kuralı ve Lagrange özdeşliği gözönüne alınırsa,

$$k_1 = \frac{\langle \vec{PQ} \times \vec{u}_2, \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 \rangle}{\langle \vec{u}_1 \times \vec{u}_2, \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 \rangle} \text{ ve } k_2 = \frac{\langle \vec{PQ} \times \vec{u}_1, \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 \rangle}{\langle \vec{u}_1 \times \vec{u}_2, \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 \rangle}$$

bulunur. Böylece,

$$\vec{MP} = -k_1 \vec{u}_1 \Rightarrow M = P + k_1 \vec{u}_1 \text{ ve } \vec{QN} = -k_2 \vec{u}_2 \Rightarrow N = Q + k_2 \vec{u}_2$$

eşitliklerinden, M ve N noktalarının koordinatları bulunur.



Örnek 5.29 $\frac{x-1}{2} = 1-y, z=1$ ve $x-1=z-1, y=2$ doğrularının birbirlerine en yakın oldukları noktaların koordinatlarını bulunuz.

Çözüm : $P(1, 1, 1), Q(1, 2, 1), \overrightarrow{PQ} = (0, 1, 0), \vec{u}_1 = (2, -1, 0)$ ve $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)$ olduğundan,

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -2, 1),$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, -1),$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -2)$$

eşitlikleri, yukarıdaki teoremden elde edilen formüllerde kullanılırsa,

$$k_1 = \frac{\langle \overrightarrow{PQ} \times \vec{u}_2, \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 \rangle}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|^2} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

$$k_2 = \frac{\langle \overrightarrow{PQ} \times \vec{u}_1, \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 \rangle}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|^2} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

olduğundan,

$$M = P + k_1 \vec{u}_1 = (1, 1, 1) - \frac{1}{3}(2, -1, 0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)$$

$$N = Q + k_2 \vec{u}_2 = (1, 2, 1) - \frac{1}{3}(1, 0, 1) = \left(\frac{2}{3}, 2, \frac{2}{3}\right)$$

elde edilir.

5.28) Alıştırma $z-2=y, x=1$ ve $x-1=\frac{y-1}{2}, z=2$ doğruları arasında en kısa uzaklığı ve doğrular üzerinde, ek kısa uzaklığı veren noktaları bulunuz.

Yanıt : $\frac{\sqrt{6}}{6}, M(1, 1/6, 13/6)$ ve $N(2/3, 1/3, 2)$.

Çözümlü Problemler

5.1 Problem : $2x - 3y = 5$ doğrusunun doğrultmanı, $\vec{v} = (4, k)$ vektörüne dik ise k kaçtır?

Çözüm : $2x - 3y = 5$ denklemini düzenleyelim.

$$2x = 3y + 5 \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2} + \frac{5}{6}$$

eşitliğine göre, doğrultman vektörü $\vec{u} = (3, 2)$ vektörü alınabilir.

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Rightarrow 12 + 2k = 0$$

eşitliğinden, $k = -6$ bulunur.

5.2 Problem : $P(1, 3)$ noktasından geçen ve $\vec{n} = (2, 3)$ vektörüne dik olan doğru, y eksenini hangi noktada keser?

Çözüm : İstenen doğrunun doğrultmanı $\vec{n} = (2, 3)$ vektörüne dik olduğundan, $\vec{u} = (-3, 2)$ alınabilir. Buna göre, $P(1, 3)$ noktasından geçen doğrunun denklemi :

$$\frac{x - 1}{-3} = \frac{y - 3}{2}$$

olur. $x = 0$ olduğunda y eksenini keser. O halde,

$$\frac{1}{3} = \frac{y - 3}{2}$$

eşitliğinden $y = \frac{11}{3}$ bulunur.

5.3 Problem : $\frac{x - 1}{2} = \frac{y}{2} = z - 1$ doğrusunun y eksenine yaptığı açının kosinüsü nedir?

Çözüm : $\vec{u} = (2, 2, 1)$ vektörünün $\vec{j} = (0, 1, 0)$ vektörüyle yaptığı açığı bulmalıyız. Buna göre,

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{j} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{j}\|} = \frac{2}{3}$$

elde edilir.

5.4 Problem : $A(1, 1, 2)$ noktasının, $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6}$ doğrusuna uzaklığını bulunuz.

Çözüm : $\vec{u} = (2, 3, 6)$ ve $P(0, 0, 0)$ 'dır. İstenen uzaklık :

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{\text{Alan}}{\text{Taban}} = \frac{\|\vec{PA} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \\ &= \frac{\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} \\ &= \frac{\|(0, -2, 1)\|}{7} = \frac{\sqrt{5}}{7} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

5.5 Problem : $P(1, 1, 1)$ ve $Q(4, 2, k)$ noktalarından geçen doğrunun, x eksenini kestiği bilindiğine göre, k kaçtır? Doğru, x eksenini hangi noktada keser?

Çözüm : P ve Q noktalarından geçen doğru :

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-1}{2-1} = \frac{z-1}{k-1}$$

dir. x eksenini kestiği noktada $y = z = 0$ olmalıdır.

$$\frac{x-1}{3} = \frac{-1}{1} = \frac{-1}{k-1}$$

eşitliğinden $k-1 = 1 \Rightarrow k = 2$ olur. Doğru x eksenini $x = -2$ noktasında keser.

5.6 Problem : $\alpha(t) = (t-1, 2t-2, 2t)$ doğrusuyla, $x-1 = y = 1-2z$ doğrusunun arasındaki açının kosinüsü nedir?

Çözüm : α doğrusunun doğrultmanı $\vec{u}_1 = (1, 2, 2)$ ve ikinci doğrunun doğrultmanı ise $\vec{u}_2 = (1, 1, -1/2)$ 'dir. Kesirlerle uğraşmamak için, $\vec{u}_2 = (2, 2, -1)$ alınabilir. Buna göre, bu iki doğrunun arasındaki açı θ olmak üzere,

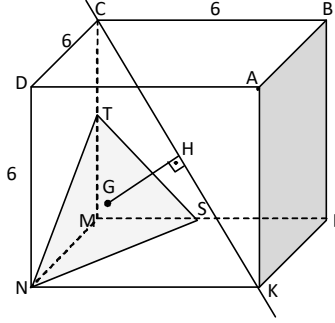
$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle}{\|\vec{u}_1\| \|\vec{u}_2\|} = \frac{4}{9}$$

elde edilir.

5.7 Problem : Şekildeki küp şeklindeki bir odanın, kenar uzunlukları 6 br'dir.

$$|CT| = |TM|, |SM| = |SL|$$

olmak üzere, G noktası TNS üçgeninin ağırlık merkezidir. G noktasının, CK doğrusuna en yakın uzaklığını bulunuz.



Çözüm : TNS üçgeninin ağırlık merkezi,

$$G = \frac{(6, 0, 0) + (0, 3, 0) + (0, 0, 3)}{3} = (2, 1, 1)$$

'dir. Öncelikle CK doğrusunun denklemini bulalım. Doğru, $C(0, 0, 6)$ ve $K(6, 6, 0)$ noktalarından geçtiğine göre; denklemi :

$$\frac{x-0}{6} = \frac{y-0}{6} = \frac{z-6}{-6} = \lambda \text{ veya } x = y = 6 - z = k$$

yazılabilir. Buna göre, G noktasının CK doğrusuna uzaklığı :

$$\ell = \frac{\text{Alan}}{\text{Taban}} = \frac{\|\vec{u} \times \overrightarrow{CG}\|}{\|\vec{u}\|}$$

eşitliğinden, $\vec{u} = (1, 1, -1)$ ve $\overrightarrow{CG} = (2, 1, -5)$ ve

$$\vec{u} \times \overrightarrow{CG} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = (-4, 3, -1)$$

olduğundan,

$$\ell = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}$$

bulunur.

5.8 Problem : $\frac{x-1}{2} = y = z-1$ ve $x-1 = \frac{y}{2} = z-2$ doğruları arasındaki uzaklığı ve birbirlerine en yakın oldukları noktaların koordinatlarını bulunuz.

Çözüm : $\vec{u}_1 = (2, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 2, 1)$, $\vec{PQ} = (0, 0, 1)$ olduğuna göre,

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 3)$$

ve

$$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{PQ}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

olur ki, en kısa uzaklık :

$$\ell = \frac{\text{Hacim}}{\text{Taban Alanı}} = \frac{\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{PQ})}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|} = \frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{11}}{11}$$

elde edilir. En yakın oldukları koordinatlar ise,

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = (-1, -1, 3)$$

$$\vec{PQ} \times \vec{u}_2 = (0, 0, 1) \times (1, 2, 1) = (-2, 1, 0)$$

$$\vec{PQ} \times \vec{u}_1 = (0, 0, 1) \times (2, 1, 1) = (-1, 2, 0)$$

olduğu da gözönüne alınırsa,

$$k_1 = \frac{\langle \vec{PQ} \times \vec{u}_2, \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 \rangle}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|^2} = \frac{\langle (-2, 1, 0), (-1, -1, 3) \rangle}{11} = \frac{1}{11}$$

$$k_2 = \frac{\langle \vec{PQ} \times \vec{u}_1, \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 \rangle}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|^2} = \frac{\langle (-1, 2, 0), (-1, -1, 3) \rangle}{11} = \frac{-1}{11}$$

olduğundan,

$$M = P + k_1 \vec{u}_1 = (1, 0, 1) + \frac{1}{11} (2, 1, 1) = \left(\frac{13}{11}, \frac{1}{11}, \frac{12}{11} \right)$$

$$N = Q + k_2 \vec{u}_2 = (1, 0, 2) - \frac{1}{11} (1, 2, 1) = \left(\frac{10}{11}, \frac{-2}{11}, \frac{21}{11} \right)$$

bulunur.

Bölüm Sonu Tekrar Testi (DOĞRU DENKLEMİ)

1. $A(1, 2, 2)$ noktasından geçen ve $\vec{u} = (3, 4, 1)$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemi nedir?
A) $x - 3 = \frac{y - 4}{2} = \frac{z - 1}{2}$ **B)** $\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{-1}$ **C)** $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$
D) $\frac{x - 3}{2} = \frac{y - 4}{2} = \frac{z - 1}{-1}$ **E)** $\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{4} = z - 2$
2. $A(1, 2)$ noktasından geçen ve $\vec{u} = (1, 3)$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemi nedir?
A) $y = 3x - 1$ **B)** $y = 2x$ **C)** $y = -3x + 2$ **D)** $y = -x + 3$ **E)** $y = x - 1$
3. $x = 2\lambda - 2, y = -3\lambda + 2, z = 3$ doğrusu aşağıdaki vektörlerden hangisine paraleldir?
A) $(2, -3, 1)$ **B)** $(-2, 2, 3)$ **C)** $(2, -3, 0)$ **D)** $(2, 3, 1)$ **E)** $(2, -3, 1)$
4. $A(1, 2, 3)$ ve $B(2, 3, 1)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi hangisidir?
A) $x - 1 = \frac{y - 2}{3} = z - 3$ **B)** $x - 1 = y - 2 = \frac{z - 3}{2}$ **C)** $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$
D) $\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 3}{2} = \frac{z - 1}{3}$ **E)** $x - 1 = y - 2 = \frac{3 - z}{2}$
5. Aşağıdakilerden hangisi, $A(1, 2, 3)$ ve $B(2, 3, 3)$ noktalarından geçen doğrunun üzerindedir.
A) $(5, 9, 3)$ **B)** $(9, 5, 3)$ **C)** $(5, 7, 0)$ **D)** $(5, 6, 3)$ **E)** $(2, 3, 1)$
6. Aşağıdaki noktalardan hangisi, $3x - 1 = y, z = 1$ ve $3x - 1 = 2y = 3z$ doğrularına dik olan ve $A(1, 2, 1)$ noktasından geçen doğrunun üzerindedir?
A) $(7, 0, -2)$ **B)** $(-2, 5, 3)$ **C)** $(7, 4, 4)$ **D)** $(2, 3, -1)$ **E)** $(2, -3, 1)$
7. Aşağıdaki noktalardan hangisi, $2x = 2y - 1 = 1 - 3z$ doğrusuna paralel olan ve $A(1, 3, -2)$ noktasından geçen doğrunun üzerindedir?
A) $(2, -3, 0)$ **B)** $(4, 6, -4)$ **C)** $(2, 3, -2)$ **D)** $(2, 3, 1)$ **E)** $(2, -3, 2)$
8. $A(3, 0, 2)$ noktasının $\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{2} = z$ doğrusuna olan uzaklığını bulunuz.
A) $\frac{\sqrt{65}}{3}$ **B)** 4 **C)** $\frac{\sqrt{63}}{3}$ **D)** $\frac{\sqrt{62}}{3}$ **E)** $\frac{2\sqrt{15}}{3}$

9. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-4}{3}$ ve $\frac{x+2}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{-4}$ doğruları arasındaki açının kosinüsünü bulunuz.
A) $\frac{3}{4}$ **B)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **C)** 1 **D)** $\frac{2}{\sqrt{5}}$ **E)** 0
10. $\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-1}{-2}$ ve $\frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$ doğruları arasındaki uzaklığı bulunuz.
A) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ **B)** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ **C)** $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ **D)** $\frac{9\sqrt{5}}{5}$ **E)** $\frac{12\sqrt{5}}{5}$
11. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{1-z}{2}$ doğrusuyla $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{k}$, $z=2$ doğrusunun kesişebilmesi için $k=?$
A) 3 **B)** 4 **C)** 1 **D)** 2 **E)** 5
12. Köşeleri $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 3, -1)$, $C = (4, 3, 5)$ olan üçgenin A noktasından çıkan kenarortayının üzerinde bulunduğu doğrunun denklemini bulunuz.
A) $x-1 = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}$ **B)** $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$ **C)** $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$
D) $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{3} = z-2$ **E)** $\frac{x-1}{3} = \frac{y-0}{4} = z-1$
13. $\frac{x+5}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{1-z}{2}$ ve $\frac{x-3}{k} = \frac{2-y}{4} = 3-z$ doğruları birbirine dik ise k kaçtır?
A) -3 **B)** 4 **C)** 1 **D)** -2 **E)** 3
14. $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{-2}$ ve $\frac{x-3}{k} = \frac{y-2}{-3} = 3-z$ doğruları aynı düzlemde ise k kaçtır?
A) 3 **B)** 4 **C)** 1 **D)** 2 **E)** 5
15. $\mathbb{R}^4$ uzayında, $xyzw$ koordinatlarına göre, $A(1, 2, 1, 1)$ noktasının, $\frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{1-z}{2}$, $w=1$ doğrusuna uzaklığını bulunuz.
A) $\sqrt{2}$ **B)** $2\sqrt{2}$ **C)** 1 **D)** 2 **E)** $\frac{\sqrt{37}}{3}$

16. $\alpha(t) = (t, 2t - 3)$ doğrusuna dik olan ve $P(1, 1)$ noktasından geçen doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

- A)** $-2x + y + 1 = 0$ **B)** $2x - y + 1 = 0$ **C)** $x - 2y + 1 = 0$
D) $2x + y - 3 = 0$ **E)** $x + 2y - 3 = 0$

17. $\alpha(t) = (t, 2t - 3, 3t + 1)$ ve $\beta(t) = (3t - 1, t - 2, 2t - 3)$ doğruları arasındaki açının kosinüsü nedir?

- A)** $\frac{3}{4}$ **B)** $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{14}}$ **C)** $\frac{11}{14}$ **D)** $\frac{11}{\sqrt{14}}$ **E)** 0

Yanıtlar : 1.E 2.A 3.C 4.E 5.D 6.A 7.B 8.A 9.E 10.E 11.B 12.D 13.A 14.C 15.B 16.E 17.C

UZAYDA DÜZLEM DENKLEMİ

$\mathbb{R}^3$ uzayında, iki boyutlu olan, eğrilmeyen düz geometrik yapıya **düzlem** denir. Bir doğru ile bu doğrunun dışındaki bir noktayı içinde bulunduran bir tek düzlem vardır. Düzlem içindeki bir doğruya dik olan bir vektör, düzlem içindeki tüm doğrulara diktir. Düzlem denklemini en basit olarak, vektörleri ve iç çarpımı kullanarak ifade edebiliriz. Düzleme dik olan bir vektör, düzlem üzerindeki tüm vektörlere dik olacağından, iç çarpımları sıfır olacaktır. O halde, düzlem denklemini belirlemede en önemli vektör, düzleme dik olan vektördür. Bu vektöre **düzlemin normali** diyeceğiz ve $\vec{N}$ harfi ile göstereceğiz. $\vec{N}$ birim vektör ise, $\vec{N}$ 'ye **düzlemin birim normali** diyeceğiz.

Bir Noktası ve Normali Bilinen Düzlemin Denklemi

6.1 ★ **Teorem** $\mathbb{R}^3$ uzayında, bir $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve $\vec{N} = (A, B, C)$ vektörüne dik olan düzlemin denklemi

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

dir.

Kanıt : $X(x, y, z)$ düzlemin değişken noktasını göstermek üzere, $\overrightarrow{PX}$ vektörü daima, $\vec{N}$ vektörüne diktir. O halde,

$$\langle \overrightarrow{PX}, \vec{N} \rangle = 0$$

eşitliği sağlanmalıdır.

$P(x_0, y_0, z_0)$ ve $\vec{N} = (A, B, C)$ olmak üzere,

$$\langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0), (A, B, C) \rangle = 0$$

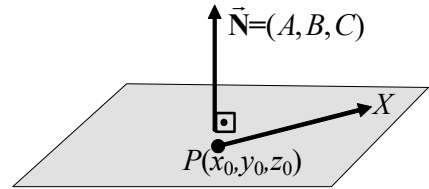
eşitliğinden,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse, düzlem denklemlerinin

$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0 = D$$

formunda olacağı görülebilir. ■



Sonuç : $\mathbb{R}^3$ uzayında xyz dik koordinat sistemine göre verilen,

$$Ax + By + Cz = D$$

formundaki bir düzlem denklemine göre, değişkenlerin katsayıları ile oluşturulan $\vec{N} = (A, B, C)$ vektörü, bu düzlemin normal vektörüdür.

Örnek 6.1 $P(1, 2, 3)$ noktasından geçen ve $\vec{N} = (2, 3, 1)$ vektörüne dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm : $2(x - 1) + 3(y - 2) + 1(z - 3) = 0$ eşitliğinden, $2x + 3y + z = 11$ elde edilir.

Örnek 6.2 $2x + 3y - z = 12$ düzleminin birim normalini yazınız.

Çözüm : x, y, z koordinat eksenlerinin katsayıları düzlemin bir normal vektörü olduğundan, bu düzlemin normali $\vec{N} = (2, 3, -1)$ ve birim normali de $\vec{N}_0 = \frac{\mp 1}{\sqrt{14}}(2, 3, -1)$ vektörü olur.

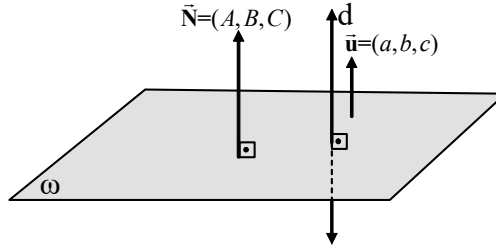
Bazen düzlemin normali, yani düzleme dik olan vektör dolaylı olarak verilebilir. Bu tür örneklerle çok kez karşılaşacağız. Ne demek istediğimizi, aşağıdaki örnekle açıklayalım.

Örnek 6.3 $\frac{x-1}{2} = y-2 = \frac{z-1}{4}$ doğrusuna dik olan ve $P(1, 1, 2)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm : Burada düzlemin normali aslında dolaylı olarak verilmiş. Doğru düzleme dik olduğundan, **doğrunun doğrultmanı**, düzlemin normali olarak alınabilir. Şekli inceleyiniz. Buna göre, $\vec{N} = \vec{u} = (2, 1, 4)$ olduğundan, düzlem denklemi :

$$2(x - 1) + 1(y - 1) + 4(z - 2) = 0$$

eşitliğinden, $2x + y + 4z = 11$ bulunur.



Örnek 6.4 $2x + 3y + 5z = 12$ düzlemine dik olan ve $P(1, 2, 3)$ noktasından geçen doğru denklemini yazınız.

Çözüm : Doğru düzleme dik ise, doğrunun doğrultmanı düzlemin normali olarak alınabilir. Buna göre, $\vec{u} = \vec{N} = (2, 3, 5)$ olduğundan, doğru denklemi :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{5}$$

olur.

6.1) Alıştırma $P(1, 0, 1)$ noktasından geçen ve $\vec{N} = (0, 2, 1)$ vektörüne dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

Yanıt : $2y + z = 1$.

6.2) Alıştırma $P(1, 2, 3)$ noktasından geçen ve $\vec{N} = (0, 0, 1)$ vektörüne dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

Yanıt : $z = 3$.

6.3) Alıştırma $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4}$ doğrusuna dik olan ve $P(1, 1, 2)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

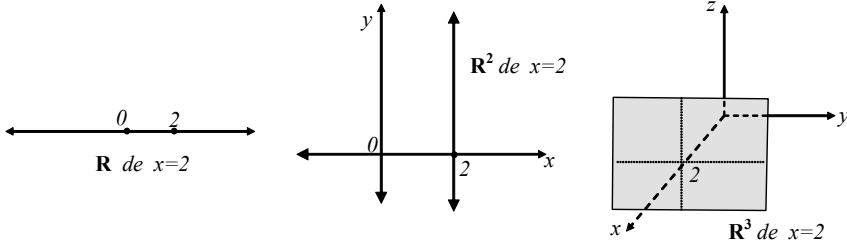
Yanıt : $2x + 3y + 4z = 13$.

Örnek 6.5 $x = 2$ denkleminin, $\mathbb{R}$ uzayında, $\mathbb{R}^2$ uzayında ve $\mathbb{R}^3$ uzayında hangi geometrik şekilleri gösterdiğini yazınız.

Çözüm : $x = 2$, $\mathbb{R}$ uzayında bir nokta belirtir.

$x = 2$, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir doğru belirtir.

$x = 2$, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir düzlem belirtir. (Normali $\vec{N} = (1, 0, 0)$ olan ve $(2, y_0, z_0)$ noktasından geçen düzlem)



6.4) Alıştırma Aşağıdaki denklemleri verilen düzlemlerin normal vektörlerini yazınız.

a) $2x + 3y + z = 2$ $\vec{N} = (2, 3, 1)$

b) $x - 3y + 2z = 4$ $\vec{N} = (1, -3, 2)$

c) $x + 3y = 0$ $\vec{N} = (1, 3, 0)$

d) $x + 5z = 3$ $\vec{N} = (1, 0, 5)$

e) $x = 2$ $\vec{N} = (1, 0, 0)$

6.5) Alıştırma $P(1, 3, 4)$ noktasından geçen ve $\vec{N} = (0, 1, 0)$ vektörüne dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

Yanıt : $y = 3$ düzlemi.

Hiperdüzlem : $\mathbb{R}^n$ uzayında, verilen bir $\vec{N}$ vektörüne dik olan vektörler kümesinin gerdiği uzaya hiperdüzlem denir. $\mathbb{R}^n$ uzayında, bir hiperdüzlem $n - 1$ vektör tarafından gerilir ve $n - 1$ boyutludur. Bu $n - 1$ vektörle birlikte $\vec{N}$ vektörü, $\mathbb{R}^n$ uzayının bir tabanı olur. Bir hiperdüzlem daima bulunduğu uzayı iki kısma ayırır. $\mathbb{R}^n$ uzayında bir hiperdüzlemin denklemini en genel şekilde,

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n = D$$

formunda vermek mümkündür. Ayrıca, $\mathbb{R}^3$ uzayındaki yöntemle de denklemi bulunabilir. Örneğin, $\mathbb{R}^4$ uzayında, $\vec{N} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ vektörüne dik olan ve $P(p_1, p_2, p_3, p_4)$ noktasından geçen hiperdüzlem denklemini, $\langle \vec{PX}, \vec{N} \rangle = 0$ eşitliğini kullanarak, $X(x_1, x_2, x_3, x_4)$ değişken nokta olmak üzere,

$$A_1(x_1 - p_1) + A_2(x_2 - p_2) + A_3(x_3 - p_3) + A_4(x_4 - p_4) = 0$$

denkleminle verebiliriz.

Örnek 6.6 $\mathbb{R}^4$ uzayında, $\vec{N} = (1, 2, 3, 4)$ vektörüne dik olan ve $P(2, 3, 1, 1)$ noktasından geçen hiperdüzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm : $\langle \vec{PX}, \vec{N} \rangle = 0$ eşitliğini kullanarak,

$$1(x_1 - 2) + 2(x_2 - 3) + 3(x_3 - 1) + 4(x_4 - 1) = 0$$

eşitliğinden, $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 15$ bulunur.

Örnek 6.7 $\mathbb{R}^5$ uzayında verilen, $2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 10$ hiperdüzleminin birim normalini bulunuz.

Çözüm : $\vec{N} = \frac{\mp 1}{\sqrt{7}}(2, 1, 0, 1, -1)$ 'dir.

6.6) Alıştırma $P(1, 1, 1, 1, 1)$ noktasından geçen ve $\vec{N} = (2, 1, 3, 0, 4)$ vektörüne dik olan hiperdüzlemin denklemini bulunuz.

Yanıt : $2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 10$.

6.7) Alıştırma $\mathbb{R}^4$ uzayında verilen $x_2 - 3x_3 + x_4 = 10$ hiperdüzleminin birim normalini bulunuz:

Yanıt : $\vec{N} = \frac{\mp 1}{\sqrt{11}}(0, 1, -3, 1)$.

Üç Noktası Verilen Düzlem Denklemi

Bir düzlemin normal vektörü daima açıkça verilmeyebilir. Örneğin, düzlemin sadece doğrusal olmayan üç noktası verilmiş olabilir. Böyle bir durumda, vektörlerin özellikleri kullanılarak, düzlemin denklemini bulabiliriz. Nasıl bulacağımızı 2 farklı şekilde görelim.

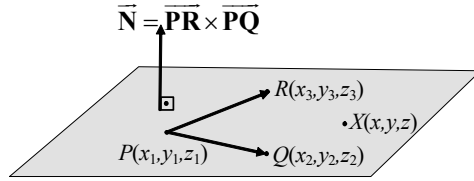
1. Vektörel Çarpımla Düzlemin Normal Vektörü Bulunabilir.

Bunun için, düzlem üzerinde verilen doğrusal olmayan üç noktayı kullanarak oluşturacağımız herhangi iki vektörün vektörel çarpımı, bize düzlemin normal vektörünü verecektir. Şekilden de görüldüğü gibi, düzlemin doğrusal olmayan üç noktası P, Q, R olsun.

Bu durumda,

$$\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ}$$

vektörel çarpımı, düzleme dik olduğundan, $\vec{N} = \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ}$ alınabilir.



Örnek 6.8 $P(2, 1, 0)$, $Q(2, 2, 1)$, $R(0, 2, 2)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm : $\overrightarrow{PR} = (-2, 1, 2)$ ve $\overrightarrow{PQ} = (0, 1, 1)$ olduğundan,

$$\vec{N} = \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 2, -2)$$

bulunur. Buradan, düzlem denklemi :

$$(-1)(x - 2) + 2(y - 1) + (-2)(z - 0) = 0$$

eşitliğinden, $-x + 2y - 2z = 0$ bulunur.

6.8) Alıştırma $P(2, 1, 1)$, $Q(0, 2, 1)$, $R(1, 3, 2)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Yanıt : $x + 2y - 3z = 1$.

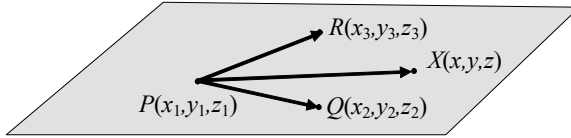
2. Düzlemde Bulunan Üç Vektörün Lineer Bağımlı Olmasının Kullanılması

6.2 ★ **Teorem** $\mathbb{R}^3$ uzayında, $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ ve $R(x_3, y_3, z_3)$ noktalarından geçen düzlemin denklemi :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

dir:

Kanıt : Verilen P, Q, R noktalarından biri başlangıç noktası kabul edilerek, üç vektör oluşturalım. X değişken noktayı göstermek üzere, $\overrightarrow{PX}$, $\overrightarrow{PQ}$ ve $\overrightarrow{PR}$ vektörleri aynı düzlemde olduklarından lineer bağımlıdır. (Şekli inceleyiniz.)



Buna göre, $\det(\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) = 0$ determinanı bize düzlem denklemini verir. O halde, $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ ve $R(x_3, y_3, z_3)$ noktaları için,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ veya } \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

eşitliği bize, düzlemin denklemini verecektir.

Örnek 6.9 $P(2, 1, 0)$, $Q(2, 2, 1)$, $R(0, 2, 2)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm : $\overrightarrow{PR} = (-2, 1, 2)$ ve $\overrightarrow{PQ} = (0, 1, 1)$ olduğundan,

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 & z - 0 \\ 2 - 2 & 2 - 1 & 1 - 0 \\ 0 - 2 & 2 - 1 & 2 - 0 \end{vmatrix} = 0$$

eşitliğinden, $x - 2y + 2z = 0$ bulunur.

6.9) Alıştırma $P(1, 1, 1)$, $Q(2, 3, 1)$, $R(4, 2, 2)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

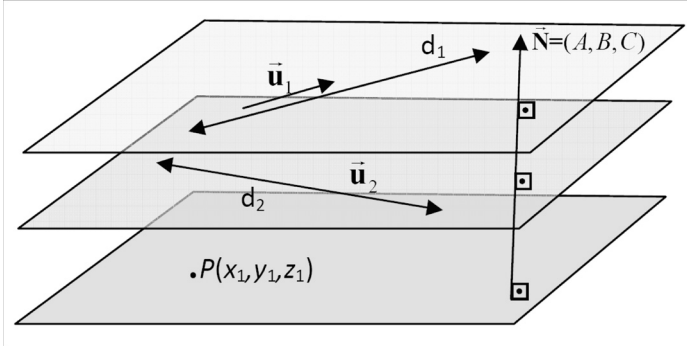
Yanıt : $2x - y - 5z = -4$.

Verilen iki doğruya paralel olan ve bir noktası verilen düzlemin denklemi

Eğer bir düzlem, iki doğruya paralel ise, bu doğruların doğrultu vektörlerine de paraleldir. Bu durumda, düzlemin normal vektörü, doğruların doğrultman vektörlerine dik olacaktır. Doğruların doğrultmanları $\vec{u}_1$ ve $\vec{u}_2$ olmak üzere, $\vec{N} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ alınabilir. Böylece, normali ve bir noktası bilinen düzlem denklemini bulabiliriz. Buna göre, P düzlem üzerinde bir nokta ve X düzlem üzerinde herhangi bir noktayı göstermek üzere,

$$\langle \vec{u}_1 \times \vec{u}_2, \overrightarrow{PX} \rangle = \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{PX}) = 0$$

eşitliği düzlem denklemini verir.



Örnek 6.10 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = z$ ve $\frac{x-1}{2} = \frac{z-2}{3}, y=1$ doğrularına paralel olan ve $P(1, 2, 3)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm : Doğruların doğrultmanları, $\vec{u}_1 = (2, 2, 1)$ ve $\vec{u}_2 = (2, 0, 3)$ biçimindedir. $P(1, 2, 3)$ için,

$$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{PX}) = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6x - 4y - 4z + 14 = 0$$

eşitliğinden, $3x - 2y - 2z = -7$ elde edilir.

6.10) Alıştırma $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = 1-z$ ve $x-1 = \frac{y-2}{3}, z=1$ doğrularına paralel olan ve $P(1, 2, 3)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Yanıt : $3x - y + 3z = 10$.

İki Düzlemin Birbirine Göre Durumları

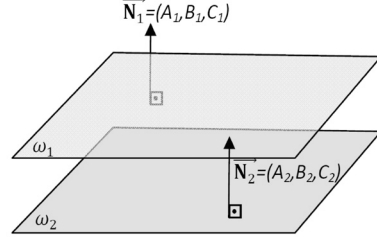
İki Düzlemin Paralel Olması ve Dik Olması Durumları

İki düzlem birbirlerini kesmiyorlar ise paraleldirler. İki düzlem birbirini kesiyorsa bir doğru boyunca keser. ω_1 ve ω_2 düzlemlerinin normaleri sırasıyla $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ olmak üzere, ω_1 ve ω_2 düzlemlerinin paralel olması için $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$ olmalıdır. Yani;

$\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ve $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ ise

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = k$$

olması gerekir.

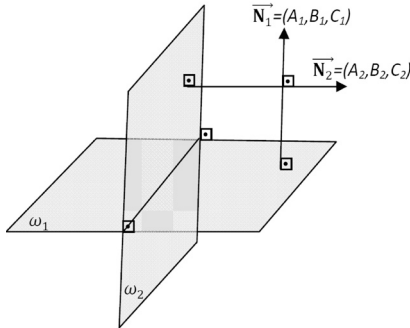


Örnek 6.11 $2x - 3y + 4z = 3$ düzlemine paralel olan ve $P(1, 2, 3)$ noktasından geçen düzlemin denklemini yazınız.

Çözüm : Düzlemler paralel olacağından, normalleri aynı alınabilir. Buna göre,

$$2(x - 1) - 3(y - 2) + 4(z - 3) = 0$$

eşitliğinden, $2x - 3y + 4z = 8$ düzlemi elde edilir.



İki düzlemin dik kesişmesi için

$$\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$$

olması gerekir. Buna göre

$$\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle = 0$$

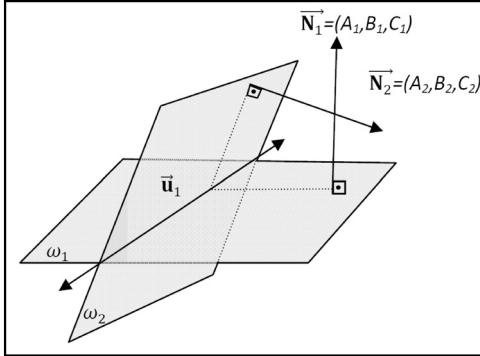
olmalıdır. Yani; $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ve $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ ise

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

olması gerekir.

Örnek 6.12 $2x - 3y + z = 3$ ve $x + ky + 2z = 4$ düzlemlerinin dik kesişmesi için k kaç olmalıdır?

Çözüm : $\vec{N}_1 = (2, -3, 1)$ ve $\vec{N}_2 = (1, k, 2)$ olduğundan, $\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle = 0$ eşitliğine göre, $2 - 3k + 2 = 0$ olmalıdır. Buradan $k = 4/3$ bulunur.

İki Düzlem Arasındaki Açının Bulunması

İki düzlem arasındaki açıyı da, yine normalleri yardımıyla kolayca bulabiliriz.

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle}{\|\vec{N}_1\| \|\vec{N}_2\|}$$

değeri, düzlemler arasındaki açıyı verir. Bu değer pozitif ise, düzlemler arasındaki dar açının kosinüsü, negatif ise, düzlemler arasındaki geniş açının kosinüsü bulunmuş olur.

Örnek 6.13 $2x - y + 2z = 3$ ve $x - 2y + 2z = 4$ düzlemleri arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm : $\vec{N}_1 = (2, -1, 2)$ ve $\vec{N}_2 = (1, -2, 2)$ olduğundan,

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle}{\|\vec{N}_1\| \|\vec{N}_2\|} = \frac{2 + 2 + 4}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9}$$

bulunur. O halde, $\theta = \arccos \frac{8}{9}$ olur.

6.11) Alıştırma $x - 3y + 2z = 5$ düzlemine paralel olan ve $P(1, 2, 3)$ noktasından geçen düzlemin denklemini yazınız.

Yanıt : $x - 3y + 2z = 1$

6.12) Alıştırma $x - ky + z = 3$ ve $kx + 2y + 3z = 4$ düzlemlerinin dik kesişmesi için k kaç olmalıdır?

Yanıt : $k = 3$

6.13) Alıştırma $x - 2y + 3z = 3$ ve $x - y + z = 3$ düzlemleri arasındaki açıyı bulunuz.

Yanıt : $\frac{1}{14}\sqrt{6}\sqrt{14}$.

İki Düzlemin Arakesit Doğrusunun Denklemine Bulunması

İki düzlemin arakesit doğrusunun bulunması demek, iki düzlemin denklemlerinin ortak çözümünün bulunması demektir. İki farklı yöntemle arakesit doğrusu bulunabilir.

1. Denklemdaki herhangi değişkene bir parametre verilerek denklem çözülür. Bu parametreye uygun olarak doğru denklemi bulunur.

2. Her iki düzlemi de sağlayan bir nokta bulunur. Düzlemlerin normallerinin vektörel çarpımı aranan arakesit doğrusunun doğrultmanı olacağından, doğru denklemine ulaşılabilir.

Örnek 6.14 $2x - y + 2z = 3$ ve $x - 2y + 2z = 4$ düzlemlerinin arakesit doğrusunun denklemini bulunuz.

Çözüm : 1. Yol. $y = t$ diyelim. Buna göre,

$$\begin{cases} 2x + 2z = 3 + t \\ x + 2z = 4 + 2t \end{cases}$$

yazılabilir. Birinci denklemden, ikinci denklemi taraf tarafa çıkarırsak, $x = -1 - t$ ve buradan da, $z = (3t + 5) / 2$ elde edilir. Böylece, arakesit doğrusunun denklemi, parametrik olarak, $x = -1 - t$, $y = t$, $z = (3t + 5) / 2$ biçiminde verilebilir. Kartezyen denklemini bulmak için, t 'yi tek başına bırakarak yazarız. Buna göre,

$$t = \frac{x + 1}{-1} = y = \frac{2z - 5}{3}$$

olur.

2. Yol. Her iki düzlemi de sağlayan bir ortak nokta bulalım. Örneğin, $y = 0$ alınırsa,

$$\begin{cases} 2x + 2z = 3 \\ x + 2z = 4 \end{cases}$$

denklem sisteminden, $x = -1$ ve $z = 5/2$ olur. Yani, $P(-1, 0, 5/2)$ noktası arakesit doğrusunun bir noktasıdır. Doğrultmanı ise,

$$\vec{u} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (2, -2, -3)$$

olduğundan, arakesit doğrusu :

$$\frac{x + 1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z - 5/2}{-3}$$

elde edilir.

6.14) Alıştırma $x + y + z = 5$ ve $2x + y - z = 1$ düzlemlerinin arakesit doğrusunun kartezyen denklemini bulunuz.

Yanıt : $\frac{x + 4}{2} = \frac{y - 9}{-3} = z.$

Bir Doğru ile Bir Düzlemin Birbirine Göre Durumları

Bir doğru ile bir düzlem için, üç durum söz konusudur.

1. Doğru düzleme paraleldir.
2. Doğru düzlemin içindedir.
3. Doğru düzlemi keser.

Şimdi bu durumları ayrı ayrı inceleyelim.

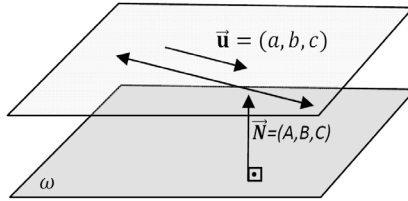
Bir $d : \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$ bir doğrusu ile, bir $\omega : Ax + By + Cz + D = 0$ düzlemi verilsin. Buna göre, doğrunun doğrultmanı $\vec{u} = (a, b, c)$ ve düzlemin normali ise $\vec{N} = (A, B, C)$ olmak üzere, doğru ve düzlemin birbirlerine göre durumlarını inceleyelim.

1. Bir Doğrunun Bir Düzleme Paralel olması

Yukarıda denklemleri verilen d doğrusu ile ω düzleminin birbirine paralel olması için, doğrunun doğrultmanı ile düzlemin normalinin birbirine dik olması ve doğru üzerinde bulunan $P(x_1, y_1, z_1)$ noktasının ω düzleminde bulunmaması gerekir. Buna göre,

$$\text{Doğru} // \text{Düzlem} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{N} \Leftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{N} \rangle = 0 \Leftrightarrow aA + bB + cC = 0 \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq 0 \end{cases}$$

şeklinde ifade edebiliriz.



Örnek 6.15 $2x - 3y + z = 5$ düzlemine paralel olan ve orjinden geçen üç doğru yazınız.

Çözüm : Düzlemin normali, $\vec{N} = (2, -3, 1)$ 'dir. Doğrunun paralel olması için, doğrunun doğrultmanı normale dik olmalıdır. Buna göre, $\langle \vec{u}, \vec{N} \rangle = 0$ olacak şekilde $\vec{u}$ vektörleri seçmeliyiz.

1. $\vec{u}_1 = (1, 1, 1) \Rightarrow x = y = z;$
2. $\vec{u}_2 = (2, 1, -1) \Rightarrow \frac{x}{2} = y = -z;$
3. $\vec{u}_3 = (1, -1, -5) \Rightarrow x = -y = \frac{z}{-5};$

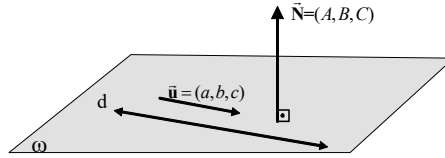
seçilebilir. Siz de, bunların dışında doğrular bulunuz.

2. Bir Doğrunun Bir Düzlem İçinde Olması

Doğru düzlemin içinde ise, doğrunun tüm noktaları düzlem denklemini sağlamalıdır. Ayrıca, doğrunun doğrultmanı ile düzlemin normali birbirine dik olur. O halde, $P(x_0, y_0, z_0)$, doğrunun bir noktası olmak üzere,

$$\text{Doğru düzlemin içindedir} \iff \begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \\ \vec{u} \perp \vec{N} \iff aA + bB + cC = 0 \end{cases}$$

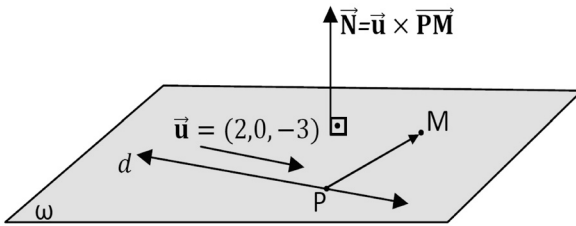
şeklinde ifade edebiliriz.



Örnek 6.16 $2x - 3y + z = 5$ düzleminin içinde bulunan ve $P(2, 1, 4)$ noktasından geçen bir doğru yazınız.

Çözüm : Doğru, $\frac{x-2}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z-4}{c}$ formunda olmalıdır. Bu doğrunun doğrultmanı, düzlemin normaline, yani $\vec{N} = (2, -3, 1)$ vektörüne dik olması gerektiğinden, $\vec{u} = (1, 1, 1)$ alınabilir. Buna göre, $x - 2 = y - 1 = z - 4$ doğrusu istenen şekildedir.

Örnek 6.17 $\frac{x-1}{2} = \frac{1-z}{3}$, $y = 1$ doğrusunu içinde bulunduran ve $M(1, 2, 3)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.



Çözüm : Doğrunun doğrultmanı $\vec{u} = (2, 0, -3)$ ve doğrunun bir noktası $P(1, 1, 1)$ 'dir. Ayrıca, $\vec{PM} = (0, 1, 2)$ 'de düzlem içinde bir vektördür. $\vec{N}$ vektörü hem $\vec{u}$ vektörüne, hem de $\vec{PM}$ vektörüne dik olduğundan, düzlemin normali

$$\vec{N} = \vec{u} \times \vec{PM} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3, -4, 2)$$

ile bulunabilir. Buradan, düzlem denklemini :

$$3(x - 1) - 4(y - 2) + 2(z - 3) = 0$$

eşitliğinden, $3x - 4y + 2z = 1$ bulunur.

6.15) Alıştırma $\frac{x-1}{2} = z, y = 1$ doğrusunu içinde bulunduran ve $M(1, 2, 3)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Yanıt : $2z - 6y - x = -7$.

6.16) Alıştırma $y = \frac{1-z}{3}, x = 1$ doğrusunu içinde bulunduran ve $M(2, 3, 4)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

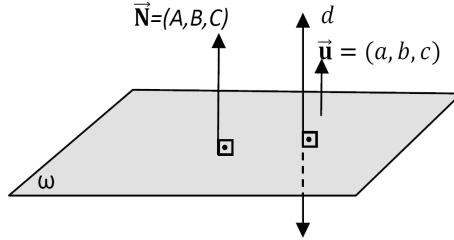
Yanıt : $12x - 3y - z = 11$.

3. Bir Doğrunun Bir Düzlemlle Bir Noktada Kesişmesi

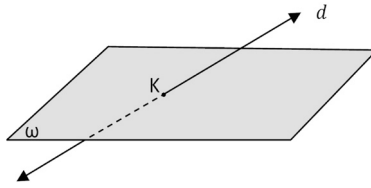
Doğrunun düzlemlle kesişmesinde, özellikle dik olarak kesişmesini ayrıca inceleyelim. Doğru düzleme dik ise, doğrunun doğrultmanı ile düzlemin normali birbirine paralel olur. O halde,

$$\text{Doğru} \perp \text{Düzlem} \iff \vec{u} \parallel \vec{N} \iff \frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$$

şeklinde ifade edebiliriz.



Diğer yandan, bir doğru ile bir düzlemin kesişme noktasını da kolayca hesaplamak mümkündür. Bunun için, doğrunun parametrik denklemi kullanılarak, düzlem denkleminde yerine yazılır ve kesişme noktasında parametrenin değeri belirlenerek kesişme noktası bulunabilir.



Örneğin, $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} = \lambda$ doğrusunu,

$$x = a\lambda + x_1, \quad y = b\lambda + y_1, \quad z = c\lambda + z_1$$

biçiminde, λ 'ya bağlı olarak yazıp, düzlem denkleminde yerine yazarsak λ değeri bulunur. Kesişme noktasını bulmak için, geriye λ değerini yerine yazmak kalır.

Örnek 6.18 $\frac{x-1}{2} = \frac{1-z}{3}$, $y = 1$ doğrusu ile $2x - 3y - z = 5$ düzleminin kesişim noktasını bulunuz.

Çözüm : $\frac{x-1}{2} = \frac{1-z}{3} = \lambda$ $y = 1$ eşitliğinden

$$x = 2\lambda + 1, \quad z = 1 - 3\lambda, \quad y = 1$$

yazılabilir. Bu değerler düzlem denkleminde yazılırsa,

$$2(2\lambda + 1) - 3 - (1 - 3\lambda) = 5$$

denkleminde, $\lambda = 1$ olur. O halde, $x = 3$, $y = 1$ ve $z = -2$ olduğundan, kesişme noktası $K(3, 1, -2)$ olur.

6.17) Alıştırma $\frac{x-2}{2} = \frac{1-y}{3} = z - 1$, doğrusu ile $2x - 3y - z = 12$ düzleminin kesişim noktasını bulunuz.

Yanıt : $K(4, -2, 2)$.

6.18) Alıştırma $\frac{2x-1}{2} = \frac{2-z}{3}$, $y = 2$ doğrusu ile $2x - 3y - z = 13$ düzleminin kesişim noktasını bulunuz.

Yanıt : $K(9/2, 2, -10)$.

6.19) Alıştırma $\mathbb{R}^4$ uzayında $\frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{3} = z = \frac{w-1}{2}$ doğrusu ile $2x - 3y - z + 4w = 23$ düzleminin kesişim noktasını bulunuz.

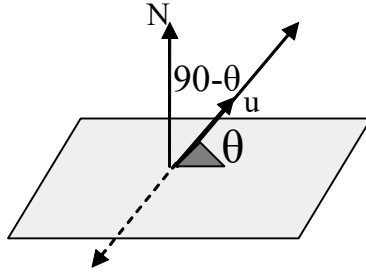
Yanıt : $K(3, -2, 1, 3)$.

4. Bir Doğru ile Bir Düzlem Arasındaki Aç

Bir doğru ile, bir düzlem arasındaki aç, doğrunun doğrultmanı ve düzlemin normalini kullanarak kolayca bulabiliriz. Aşağıdaki şekilden de takip edilirse, doğru ile düzlemin arasındaki aç θ ise, doğrunun doğrultmanı ile düzlemin normali arasındaki aç $90^\circ - \theta$ olacaktır. Buna göre,

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{N} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{N}\|} \text{ veya } \sin \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{N} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{N}\|}$$

eşitliği bize, istenen aç,ı verecektir.



Örnek 6.19 $\frac{x-1}{2} = \frac{1-z}{3} = y$ doğrusu ile $2x - 3y - z = 5$ düzlemi arasındaki açının kosinüsü nedir?

Çözüm : $\vec{u} = (2, 1, -3)$ ve $\vec{N} = (2, -3, -1)$ olduğundan,

$$\sin \theta = \frac{4 - 3 + 3}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{2}{7} \Rightarrow \cos \theta = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

olur.

Not : Paralel olmayan iki düzlemin arakesiti bir doğru olacağından, bazen, bir doğru denklemi, iki düzlem denklemiyle birlikte verilebilir.

Örnek 6.20 $\left. \begin{array}{l} x + y - 3z = 5 \\ x - y + z = 3 \end{array} \right\}$ doğrusuna dik olan ve $P(2, 1, 3)$ noktasından geçen düzlem denklemini bulunuz.

Çözüm : Önce doğru denklemini bulalım. $z = t$ olsun. Buna göre,

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 5 + 3t \\ x - y = 3 - t \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 8 + 2t \Rightarrow x = 4 + t$$

ve buradan da $y = 2t + 1$ bulunur.

Buna göre, doğru denklemi

$$t = \frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

şeklinde ve $\vec{u} = (1, 2, 1)$ 'dir. İstenilen düzlem, bu doğruya dik olduğundan, düzlemin normali, doğrunun doğrultmanına paraleldir. O halde, $\vec{N} = (1, 2, 1)$ alınabilir. Böylece, $P(2, 1, 3)$ 'den geçen düzlem :

$$(x-2) + 2(y-1) + (z-3) = 0$$

eşitliğinden $x + 2y + z - 7 = 0$ olur.

Üzerindeki İki Doğrusu Bilinen Düzlemin Denklemi

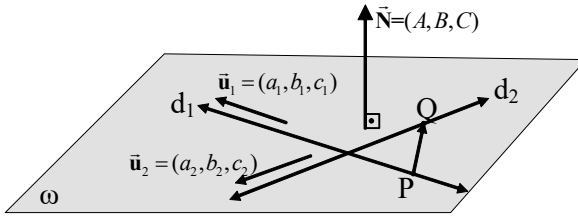
Üzerindeki iki doğrusu bilinen düzlemin denklemini bulabilmek için, öncelikle düzlemin normalini bulmak gerekir. Normali üç farklı şekilde bulmak mümkündür. Doğruların doğrultmanları $\vec{u}_1$ ve $\vec{u}_2$, doğru üzerindeki noktalar da P ve Q olmak üzere,

$$1) \vec{N} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2,$$

$$2) \vec{N} = \vec{u}_1 \times \vec{PQ},$$

$$3) \vec{N} = \vec{u}_2 \times \vec{PQ},$$

eşitliklerinden biri kullanılabilir. Bundan sonra geriye düzlem denklemini belirlemek kalır.



Örnek 6.21 $\frac{x-1}{2} = z, y=1$ ve $x-2 = \frac{2-y}{k}, z=1$ doğrularını içinde bulunduran düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm : Bu soruda, düzlemin normalini $\vec{N} = \vec{u}_1 \times \vec{PQ}$ ile bulabiliriz.

$$\vec{N} = \vec{u}_1 \times \vec{PQ} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 2)$$

olduğundan, düzlem ayrıca $P(1, 1, 0)$ noktasından geçtiğinden,

$$(-1)(x-1) + (-1)(y-1) + 2(z-0) = 0$$

eşitliğinden, $x + y - 2z = 2$ elde edilir.

6.20) Alıştırma $\frac{x-1}{2} = y = z$ ve $x-2 = \frac{2-y}{k}, z=1$ doğrularını içinde bulunduran düzlemin denklemini bulunuz.

Yanıt : $x + y - 3z = 1$.

6.21) Alıştırma $x = y = z$ ve $\frac{x-2}{k} = \frac{2-y}{3} = z$ doğrularını içinde bulunduran düzlemin denklemini bulunuz.

Yanıt : $y = x$.

Bir Noktanın Bir Düzleme Olan Uzaklığı

Aşağıdaki teorem, $\mathbb{R}^n$ uzayında da geçerlidir. Bir sonraki teorem ise, bu teoremin $\mathbb{R}^3$ için elde edilmiş özel bir halidir.

6.3 ★ Teorem $\mathbb{R}^n$ uzayında verilen bir P noktasının, normali $\vec{N}$ olan bir düzleme (veya hiperdüzleme) uzaklığı; S düzlem üzerinde herhangi bir nokta olmak üzere,

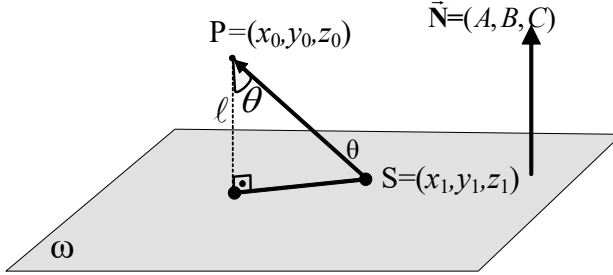
$$\ell = \frac{|\langle \vec{N}, \vec{SP} \rangle|}{\|\vec{N}\|}$$

dir.

Kanıt : Normali $\vec{N}$ olan bir ω düzleminin dışındaki bir P noktasının, düzleme uzaklığını yine iç çarpım yardımıyla bulabiliriz. Düzlem üzerindeki herhangi bir S noktası için, $\vec{SP}$ vektörünü göz önüne alalım. $\vec{SP}$ vektörü ile, P 'den düzleme inilen dikme arasındaki açı θ ise, P noktasının düzleme uzaklığı ℓ olmak üzere,

$$\ell = \|\vec{SP}\| \cos \theta$$

ile verilebilir (Şekilden takip ediniz).



Diğer yandan, θ , $\vec{N}$ ile $\vec{SP}$ arasındaki açı olduğundan,

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{N}, \vec{SP} \rangle}{\|\vec{SP}\| \|\vec{N}\|}$$

yazılabilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \ell &= \|\vec{SP}\| \frac{|\langle \vec{N}, \vec{SP} \rangle|}{\|\vec{SP}\| \|\vec{N}\|} \\ &= \frac{|\langle \vec{N}, \vec{SP} \rangle|}{\|\vec{N}\|} \end{aligned}$$

eşitliği bize, noktanın düzleme uzaklığını verir.

Örnek 6.22 $\mathbb{R}^4$ uzayında, $P(1, 1, 1, 1)$ noktasının, $x - y - z + w = 1$ hiperdüzlemine uzaklığını bulunuz.

Çözüm : Hiperdüzlemin normali : $\vec{N} = (1, -1, -1, 1)$ 'dir. Düzlem üzerindeki herhangi bir nokta da, $S(2, 1, 1, 1)$ alınabilir. Buna göre, $\vec{SP} = (-1, 0, 0, 0)$ olduğundan,

$$\ell = \frac{|\langle \vec{N}, \vec{SP} \rangle|}{\|\vec{N}\|} = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

6.4 ★ Teorem $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasının $Ax + By + Cz + D = 0$ düzlemine uzaklığı

$$\ell = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ile bulunur.

Kanıt : $S(x_1, y_1, z_1)$ düzlem üzerindeki bir nokta olsun. Bu durumda,

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$$

olur. Bu eşitliği kullanarak,

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{|\langle \vec{N}, \vec{SP} \rangle|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|(A, B, C), (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

bulunur. ■

Örnek 6.23 $P(1, 2, 3)$ noktasının $2x - 3y + 3z = 1$ düzlemine uzaklığını bulunuz.

Çözüm : $\vec{N} = (2, -3, 3)$ olduğundan,

$$\ell = \frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot (2) + 3 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{4 + 9 + 9}} = \frac{2\sqrt{22}}{11}$$

elde edilir.

6.22) Alıştırma $P(1, 2, 3)$ noktasının $2x - 3y - z = 2$ düzlemine uzaklığını bulunuz.

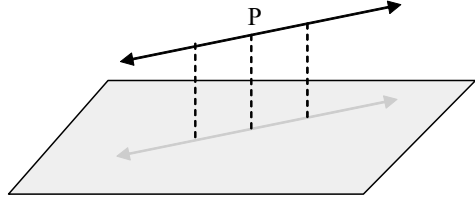
Yanıt : $9\sqrt{14}/14$.

6.23) Alıştırma $P(1, 1, 3)$ noktasının $3x - 2y + 2z = 2$ düzlemine uzaklığını bulunuz.

Yanıt : $4\sqrt{17}/17$.

Paralel Doğru ve Düzlem Arasındaki Uzaklık

Bir doğru ile bir düzlem arasındaki uzaklıktan bahsedebilmek için, doğru ve düzlemin paralel olmaları gerekir. Aksi halde, kesiştikleri için aralarındaki en kısa uzaklık sıfır olacaktır. Doğru ve düzlem paralel ise, doğru üzerindeki her noktanın düzleme uzaklığı eşit olacağından, doğru üzerinde rastgele bir nokta alınarak, bir noktanın bir düzleme uzaklık formülü kullanılarak, doğrunun düzleme uzaklığı bulunabilir.



Örnek 6.24 $\frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{3} = z$ doğrusunun $x + y + z = 5$ düzlemine uzaklığın bulunuz.

Çözüm : Doğru ile düzlemin paralel olduklarını görünüz. Yani, $\vec{u} \perp \vec{N}$ 'dir. Doğru üzerinde rastgele bir nokta alalım. $P(1, 1, 0)$ alabiliriz. Buna göre,

$$\ell = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 5|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3}$$

olur.

Paralel İki Düzlem Arasındaki Uzaklık

6.5 ★Teorem $\mathbb{R}^3$ de, $\omega_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$ ve $\omega_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$ paralel düzlemleri arasındaki uzaklık

$$\ell = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ile bulunur.

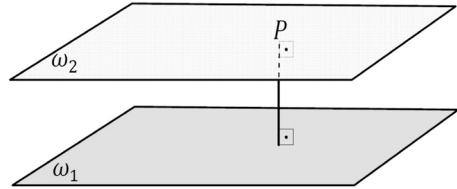
Kanıt : ω_2 düzleminin üzerinde bir $P(x_1, y_1, z_1)$ noktası alalım. Bu noktanın, ω_1 düzlemine uzaklığı

$$\ell = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ile bulunur. P, ω_2 düzlemi üzerinde olduğundan, $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D_2$ olur. Buradan,

$$\ell = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

elde edilir. ■



6.24) Alıştırma $2x - 3y - z = 2$ ve $-4x + 6y + 2z = 3$ düzlemleri arasındaki uzaklığı bulunuz.

Yanıt : $\ell = \frac{\sqrt{14}}{4}.$

Düzlem Denkleminin Parametrik Gösterimi

Kartezyen koordinatlarda, bir düzlem denklemini

$$Ax + By + Cz = D$$

formunda gösterebiliriz. Diğer yandan, iki parametre kullanarak, düzlem denklemini parametrik olarak göstermek de mümkündür. Bunun için, değişkenlerden birine u , başka birine de v denilir ve son değişken u, v cinsinden yazılır. Örneğin, $x + y - z = 3$ düzlemini, parametrik olarak,

$$x = u, y = v \text{ ve } z = u + v - 3$$

şeklinde yazabiliriz. Bu gösterimi genellikle,

$$\varphi(u, v) = (u, v, u + v - 3)$$

şeklinde yazarız.

Örnek 6.25 Parametrik denklemi $x = u + v, y = u - v$ ve $z = 2u - v$ olan düzlemin birim normalini bulunuz.

Çözüm : $x = u + v, y = u - v$ eşitliklerini taraf tarafa toplarsak,

$$x + y = 2u \Rightarrow u = \frac{x + y}{2};$$

taraf tarafa çıkarırsak da,

$$x - y = 2v \Rightarrow v = \frac{x - y}{2}$$

elde edilir. O halde,

$$z = 2 \cdot \left(\frac{x + y}{2} \right) - \left(\frac{x - y}{2} \right) \Rightarrow 2z = 2x + 2y - x + y = x + 3y$$

eşitliğinden,

$$x + 3y - 2z = 0$$

düzlem denklemini bulunur. Birim normali : $\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 3, -2)$ vektörüdür.

6.25) Alıştırma $\varphi(u, v) = (u, 2v - 1, 3u + v - 1)$ düzleminin kartezyen denklemi nedir?

Yanıt : $6x + y - 2z = 1.$

Eksenleri Kestiği Koordinatları Verilen Düzlem Denklemi

6.6 ★ **Teorem** Bir ω düzleminin x, y, z eksenlerini kestiği noktalar sırasıyla a, b, c ise, bu düzlemin denklemi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

ile bulunur.

Kanıt : İstenen düzlemin denklemi

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

olsun. Buna göre,

i) $x = a$ iken $y = z = 0$ olduğundan,
 $Aa + D = 0 \Rightarrow A = \frac{-D}{a}$ olur.

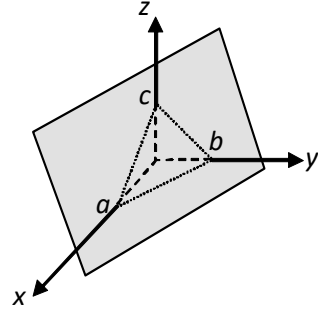
ii) $y = b$ iken $x = z = 0$ olduğundan,
 $Ba + D = 0 \Rightarrow B = \frac{-D}{b}$ olur.

iii) $z = c$ iken $y = x = 0$ olduğundan,
 $Ca + D = 0 \Rightarrow C = \frac{-D}{c}$ olur.

Buna göre, düzlem denklemi

$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z = -D \text{ veya } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

olarak bulunur. ■



Örnek 6.26 Eksenleri kestiği noktalar sırasıyla $x = 2$, $y = 3$ ve $z = -2$ olan düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm : Teorem 6.6'dan, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{2} = 1$ veya $3x + 2y - 3z = 6$ olur.

6.26 ★ **Alıştırma** $\mathbb{R}^n$ uzayında, bir hiperdüzlemin $x_1, x_2, \dots, x_n$ eksenlerini kestiği noktalar sırasıyla, $a_1, a_2, \dots, a_n$ ise, bu hiperdüzlemin denkleminin

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \dots + \frac{x_n}{a_n} = 1$$

olduğunu gösteriniz.

Düzlem Demeti

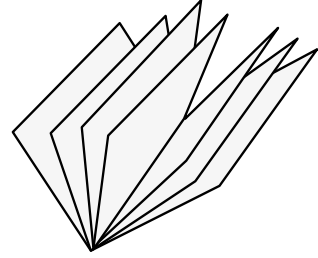
$$\omega_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

ve

$$\omega_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

düzlemleri birlikte bir doğru belirtir. Bu arakesit doğrusunu üzerinde bulunduran sonsuz tane düzlem vardır.

Bu sonsuz tane düzlemin denklemi, verilen bu iki düzlemi kullanarak ifade edilebilir.



$$\alpha (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (*)$$

denklemini inceleyelim. Bu denklem, α ve β değıştikçe yeni bir düzlem denklemi olacaktır. Şimdi, arakesit doğrusu üzerinde bulunan P ve Q noktalarını göz önüne alalım. P noktası her iki düzlem denklemini de sağlar. O halde, $(*)$ denklemini de sağlayacaktır. Benzer şekilde, Q noktası her iki düzlem denklemini de sağladığından, $(*)$ denklemini sağlayacaktır. Bu durum, $(*)$ düzleminin arakesit doğrusundan geçtiğini gösterir. Hatta, $\alpha = 0, \beta \neq 0$ ise, ω_2 düzlemi; $\beta = 0, \alpha \neq 0$ ise ω_1 düzlemi elde edilir. Şimdi tek bilinmeyenle çalışmak için, $(*)$ denklemini α 'ya bölerek, $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$ diyelim. Bu durumda, arakesit doğrusundan geçen düzlem ailesinin denklemini

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (**)$$

biçiminde ifade etmek mümkün olur. $(**)$ denklemi λ değıştikçe, arakesit doğrusundan geçen yeni bir düzlem belirtir. Bu nedenle, $(**)$ denklemine **düzlem demeti** denir. Bu düzlem demetindeki, düzlemlerden herhangi birini bulabilmek için, ω_2 düzlemi ya da arakesit doğrusu üzerinde olmayan herhangi bir noktasının verilmesi yeterlidir.

Örnek 6.27 $2x + 3y + z = 1$ ve $x - 2y + z = 3$ düzlemlerinin arakesitinden ve $P = (1, 0, 3)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm : Verilen düzlemlerin arakesitinden geçen düzlem demetinin denklemi :

$$(2x + 3y + z - 1) + \lambda (x - 2y + z - 3) = 0$$

biçimindedir. Bu denklem, $P = (1, 0, 3)$ noktasını sağlamalıdır. Buna göre,

$$(2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 3 - 1) + \lambda (1 - 2 \cdot 0 + 3 - 3) = 0$$

denkleminin çözümünden, $\lambda = -4$ bulunur. O halde, istenen düzlemin denklemi :

$$(2x + 3y + z - 1) - 4(x - 2y + z - 3) = 11y - 2x - 3z + 11 = 0$$

bulunur.

6.27) Alıştırma $2x + y + z = 0$ ve $3x - 2y - z = 3$ düzlemlerinin arakesitinden ve $P = (1, 2, 3)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Yanıt : $5x - y - 3 = 0$.

Çözümlü Problemler

6.1 Problem : Aşağıdaki doğruların kaç tanesi $2x + y - z = 3$ düzlemine diktir?

I) $x = y = \frac{z}{3}$ II) $\frac{x}{2} = y = \frac{z}{-1}$ III) $x = y = z$ IV) $x = 2y = -2z + 1$

Çözüm : Bir doğrunun bir düzleme dik olması için, doğrultmanı, normale paralel olması gerekir. Buna göre, II) ve IV) doğruları, verilen düzleme diktirler.

6.2 Problem : $\mathbb{R}^3$ uzayında aşağıdaki denklemlerin hangileri düzlem denklemi belirtir? Düzlem olanların normalini bulunuz.

I. $x + y + z = 5$ IV. $x = y = z$
 II. $\frac{x-1}{2} = y, z = 2$ V. $y = 2x - 1$
 III. $x = 1$ VI. $\varphi(u, v) = (u, v, u + v)$

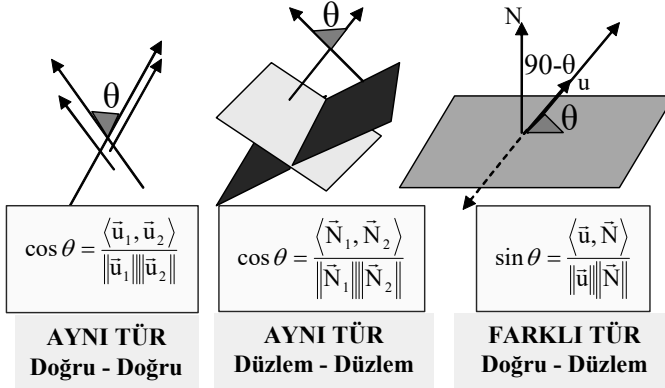
Çözüm :

I. $x + y + z = 5$	Düzlem	$\vec{N} = (1, 1, 1)$
II. $\frac{x-1}{2} = y, z = 2$	Doğru	
III. $x = 1$	Düzlem	$\vec{N} = (1, 0, 0)$
IV. $x = y = z$	Doğru	
V. $y = 2x - 1$	Düzlem	$\vec{N} = (1, -1, 0)$
VI. $\varphi(u, v) = (u, v, u + v)$	Düzlem ($z = x + y$),	$\vec{N} = (1, 1, -1)$

6.3 Problem : $\frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{2} = z - 1$ doğrusuna paralel olan ve orjinden geçen üç düzlem denklemi yazınız.

Çözüm : Bir doğrunun, bir düzleme paralel olabilmesi için, doğrunun doğrultmanı ile düzlemin normali birbirine dik olmalıdır. Buna göre, $\vec{u} = (2, -2, 1)$ olduğundan,

i) $\vec{u} \perp \vec{N}_1 = (2, 1, -2) \Rightarrow \omega_1 : 2x + y - 2z = 0,$
 ii) $\vec{u} \perp \vec{N}_2 = (1, 1, 0) \Rightarrow \omega_1 : 2x + y = 0,$
 iii) $\vec{u} \perp \vec{N}_3 = (1, 2, 2) \Rightarrow \omega_1 : x + 2y + 2z = 0.$



Bir vektörün bir doğruya paralel olması demek, doğrultmanına paralel olması demektir.
 Bir vektörün, bir düzleme paralel olması demek, normaline dik olması demektir.
 Normal düzleme ve düzlemdeki tüm vektörlere dik olduğundan, düzleme dik vektör deyince, Normal vektörle paralellik; düzleme paralel vektör deyince ise Normal vektörle diklik aranır.

6.4 Problem : $\vec{w} = (1, 2, 3)$ vektörü aşağıdaki düzlemlerden kaç tanesine paraleldir?

1. $x + 2y + 3z = 0$,
2. $2x + 4y + 6z = 0$,
3. $x + y - z = 0$
4. $2x + y = 0$
5. $x + y + z = 0$

Çözüm : $\vec{w}$ vektörü düzleme paralel ise, düzlemin normaline dik olmalıdır. Bu koşula uygun seçeneklerin sadece 3 ve 4 düzlemleri olduğunu görünüz.

6.5 Problem : $\alpha(t) = (t - 1, 2t - 2, 2t)$ doğrusuyla $x + 2y - 2z = 2$ düzlemi-nin arasındaki açının kosinüsü nedir?

Çözüm : Doğrunun doğrultmanı $\vec{u} = (1, 2, 2)$ ve düzlemin normali $\vec{N} = (1, 2, -2)$ olduğundan, doğru ve düzlemin arasındaki açı θ olmak üzere,

$$\sin \theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{N} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{N}\|} = \frac{1}{9}$$

elde edilir. O halde, $\cos \theta = \frac{\sqrt{80}}{9} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$ olur.

6.6 Problem : $P(1, 1, 0)$, $Q(3, 4, 1)$, $R(-1, 2, 1)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm : P, Q ve R 'den geçen düzlem denklemini,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 3-1 & 4-1 & 1-0 \\ -1-1 & 2-1 & 1-0 \end{vmatrix} = 2x - 4y + 8z + 2 = 0$$

eşitliğinden, $x - 2y + 4z = -1$ olarak buluruz.

6.7 Problem : $\vec{x} = (1, 1, 0)$ ve $\vec{y} = (2, 3, 2)$ vektörlerinin içinde bulunduğu düzleme dik olan ve $P(1, 1, 1)$ noktasından geçen doğruyu bulunuz.

Çözüm : $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerinin içinde bulunduğu düzlemin normali :

$$\vec{N} = \vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (2, -2, 1)$$

bulunur. Bu düzleme dik olan doğrunun doğrultmanı, düzlemin normaline paralel olmalıdır. Buna göre, $\vec{u} = \vec{N}$ alınabilir. Böylece, istenen doğrunun denklemi

$$\frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{2} = z-1$$

olur.

6.8 Problem : $A(1, 1, 1)$ noktasını ve $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z}{2}$ doğrusunu içinde bulunduran düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm : İstenen düzlemin normali

$$\vec{N} = \overrightarrow{PA} \times \vec{u}$$

ile bulunabilir. Buna göre, $\vec{u} = (2, 1, 2)$ ve $P(1, 0, 0)$ olduğundan,

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -2, 2)$$

elde edilir. Düzlem, $A(1, 1, 1)$ noktasından geçtiğinden,

$$-(x-1) - 2(y-1) + 2(z-1) = 0 \Rightarrow x + 2y - z = 1$$

elde edilir.

6.9 Problem : *Parametrik denklemi, $\varphi(u, v) = (u, u + v, 2u + v)$ olan düzlemin birim normalini bulunuz.*

Çözüm : $x = u, y = u + v$ ve $z = 2u + v$ eşitliklerinden, u ve v 'yi yok edelim.

$$y = x + v \Rightarrow v = y - x$$

olduğundan,

$$z = 2x + y - x \Rightarrow x + y - z = 0$$

elde edilir. Birim normali : $\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$ olur.

6.10 Problem : $\varphi_1(u, v) = (u - 2, v - 1, u + v - 3)$ ve $\varphi_2(u, v) = (u, 2v - 1, ku + v - 3)$ düzlemleri birbirine dik ise k nedir?

Çözüm : φ_1 denkleminde, $u = x + 2, v = y + 1$ eşitliğinden,

$$z = x + y;$$

ve φ_2 denkleminde, $u = x, v = \frac{y+1}{2}$ ve $z = kx + \frac{y+1}{2} - 3$ eşitliğinden,

$$2kx + y - 2z = 5$$

düzlem denklemleri bulunur. Buna göre,

$$\vec{N}_1 = (1, 1, -1) \text{ ve } \vec{N}_2 = (2k, 1, -2)$$

olduğundan,

$$\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Leftrightarrow 2k + 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -3/2$$

elde edilir.

6.11 Problem : $x + y + 3z + 2 = 0$ ve $x + 2z + 3 = 0$ düzlemlerinin arakesitinden ve $A(3, 1, 0)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm : $(x + y + 3z + 2) + \lambda(x + 2z + 3) = 0$ arakesit düzlemlerinin ailesinin denklemini verir. İstenen düzlem, $A(3, 1, 0)$ noktasından geçtiği için,

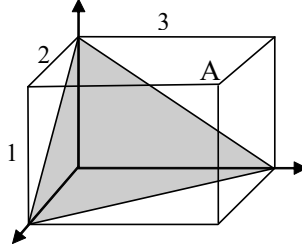
$$(3 + 1 + 0 + 2) + \lambda(3 + 0 + 3) = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

olmalıdır. O halde, $\lambda = -1$ yazılırsa,

$$(x + y + 3z + 2) - (x + 2z + 3) = y + z - 1 = 0$$

elde edilir.

6.12 Problem : $2 \times 3 \times 1$ boyutlarında dikdörtgenler prizması şeklinde bir odanın üç köşesi şekildeki gibi birleştirilerek bir üçgen duvar yapılıyor. A köşesinin bu üçgen duvara uzaklığı kaç birimdir?



Çözüm : Taralı üçgenin bulunduğu düzlemin denklemi :

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 1 \Rightarrow 3x + 2y + 6z - 6 = 0$$

olduğundan, $A(2, 3, 1)$ noktasının bu düzleme uzaklığı :

$$\ell = \frac{|3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 6 \cdot 1 - 6|}{\sqrt{9 + 4 + 36}} = \frac{12}{7}$$

olur.

6.13 Problem : $3x + ay + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$ ve $z = 0$ düzlemleriyle sınırlanan kapalı bölgenin hacmi 12 br^3 olduğuna göre a kaçtır?

Çözüm : Düzlem denklemini,

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{6/a} + \frac{z}{6} = 1$$

şeklinde yazabiliriz.

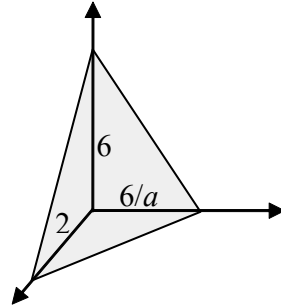
Bu düzlemin koordinat düzlemleriyle sınırladığı bölgenin hacmi bir dik üçgensel piramit olup, hacmi

$$V = \frac{1}{3} (\text{Taban Alanı}) (\text{Yükseklik})$$

olduğundan,

$$V = \frac{1}{3} \left(\frac{2 \cdot (6/a)}{2} \right) 6 = \frac{12}{a} = 12$$

eşitliğinden, $a = 1$ bulunur.



6.14 Problem : $x + y - z = 3$, $x - 2y + z = 2$ ve $x + ny - 5z = m$ düzlemleri, bir doğru boyunca kesiştiklerine göre m ve n kaçtır?

Çözüm : Bu üç düzlemin bir doğru boyunca kesişmeleri demek, aynı düzlem demetinde bulunmaları demektir. Buna göre,,

$$a(x + y - z - 3) + b(x - 2y + z - 2) = (x + ny - 5z - m)$$

olacak şekilde a, b reel sayıları olmalıdır. Burada, katsayıların eşitliğinden,

$$\begin{cases} a + b = 1 & (1) \\ a - 2b = n & (2) \\ -a + b = -5 & (3) \\ 3a + 2b = m & (4) \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. (1) ve (3)'ten $b = -2$ ve $a = 3$ bulunur. O halde, (2)'den $n = 7$ ve (4)'ten $m = 5$ elde edilir.

6.15 Problem : Uzayda, $E = \{(x, y, z) : x + 2y - 2z + 10 = 0\}$ düzlemi veriliyor. $P(1, 2, 3)$ noktasından geçen ve bu düzleme dik olan d doğrusu, E düzlemini T noktasında kestiğine göre, T noktasının orjine uzaklığı kaç birimdir?

Çözüm : Doğru düzleme dik ise, doğrultmanı olarak düzlemin normali alınabilir. Buna göre, doğrunun denklemi :

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{-2} = \lambda$$

olacaktır. Bu doğrunun düzlemle kesişimi ise,

$$(\lambda + 1) + 2(2\lambda + 2) - 2(-2\lambda + 3) + 10 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

olduğundan, $T(0, 0, 5)$ bulunur. T 'nin orjine uzaklığı 5 birimdir.

6.16 Problem : Uzayda verilen $x + 2y + 3z = 18$ düzlemi koordinat eksenlerini, A, B ve C noktalarında kesmektedir. Buna göre, ABC üçgeninin ağırlık merkezinin koordinatları toplamı kaçtır?

Çözüm : Düzlem denklemini :

$$\frac{x}{18} + \frac{y}{9} + \frac{z}{6} = 1$$

formunda yazarsak, bu düzlemin koordinat eksenlerini $A(18, 0, 0)$, $B(0, 9, 0)$ ve $C(0, 0, 6)$ noktalarında kestiğini görürüz. Buna göre, ağırlık merkezinin koordinatları : $G(6, 3, 2)$ olduğundan, yanıt 11 bulunur.

6.17 Problem : Denklemi $\frac{x-3}{2} = -y, z = -1$ olan doğru ile, $x + y - 2z = 6$ düzleminin arakesit noktasından geçen ve verilen düzleme dik olan doğrunun denklemini bulunuz. (ÖABT - İÖ. 2013)

Çözüm : $x = 2\lambda + 3, y = -\lambda$ ve $z = -1$ düzlem denkleminde yazılırsa,

$$2\lambda + 3 - \lambda + 2 = 6 \Rightarrow \lambda = 1$$

bulunur. O halde, doğru ve düzlemin arakesit noktası $T(5, -1, -1)$ olur. Doğru düzleme dik ise, doğrultmanı düzlemin normalidir. Buna göre, doğrunun denklemi :

$$x - 5 = y + 1 = \frac{z + 1}{-2}$$

elde edilir.

6.18 Problem : $A(1, 2, -3)$ noktası ile $\vec{u} = (1, -2, 2)$ ve $\vec{v} = (3, -1, -1)$ vektörleri veriliyor. A noktasından geçen ve $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerine paralel olan düzlemin denklemi aşağıdakilerden hangisidir? (ÖABT - 2013)

Çözüm : Düzlem, $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerine paralel ise, düzlemin normali bu vektörlere diktir ve

$$\vec{N} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (4, 7, 5)$$

olur. O halde, istenen düzlemin denklemi :

$$4(x - 1) + 7(y - 2) + 5(z + 3) = 0$$

eşitliğinden, $4x + 7y + 5z = 3$ bulunur.

6.19 Problem : Uzayda verilen $x - 1 = y = z$ doğrusu S düzlemi üzerindedir. S düzlemi, $P(1, 1, 1)$ noktasından geçtiğine göre, S düzleminin denklemini bulunuz. (ÖABT - İÖ. 2014)

Çözüm : Doğrunun doğrultmanı $\vec{u} = (1, 1, 1)$ ve bir noktası $A(1, 0, 0)$ 'dır. Doğru ve P noktası düzlemin üzerinde olduğundan, düzlemin normali :

$$\vec{N} = \vec{u} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, 1)$$

olur. O halde, düzlemin denklemi :

$$0(x - 1) - 1(y - 1) + 1(z - 1) = z - y = 0$$

elde edilir.

6.20 Problem : *Parametrik denklemi, $x=2t+1$, $y=3t-1$, $z=t+2$ olan doğru ile $2ax+y+z+5=0$ düzlemi veriliyor. Bu doğru ile düzlem paralel olduğuna göre, a kaçtır? (ÖABT - İÖ. 2014)*

Çözüm : Doğru ve düzlem paralel ise, doğrultman ve normal birbirine diktir.

$$\vec{u} = (2, 3, 1) \text{ ve } \vec{N} = (2a, 1, 1)$$

olduğundan, $\vec{u} \perp \vec{N}$ ise, $4a + 3 + 1 = 0$ eşitliğinden $a = -1$ bulunur.

6.21 Problem : *$x - y + z = 5$ ve $-2x + 3y - z = 1$ düzlemlerinin arakesit doğrusuna dik olan ve $A(-1, 1, 0)$ noktasından geçen düzlemin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?*

Çözüm : Arakesit doğrusunun doğrultmanı :

$$\vec{u} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 0, 2)$$

vektörüdür. $A(-1, 1, 0)$ noktasından geçen düzlem, bu doğruya dik ise, istenen düzlemin normal, arakesit doğrusunun doğrultmanı olacaktır. O halde, düzlem denklemi :

$$-2(x+1) + 0(y-1) + 2(z-0) = 0$$

eşitliğinden, $x - z = 1$ bulunur.

Bölüm Sonu Tekrar Testi (DÜZLEM DENKLEMİ)

1. $A(1, 2, 2)$ noktasından geçen ve $\vec{N} = (3, 4, 1)$ vektörüne dik olan düzlemin denklemi nedir?
A) $3x + 4y + z = 5$ **B)** $3x + 4y + z = 13$ **C)** $x + y + z = 5$
D) $x + y + z = 13$ **E)** $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-2}{1}$
2. $3x + 2y - z = 5$ düzlemi, aşağıdaki vektörlerin hangisine paraleldir?
A) $(1, 2, 3)$ **B)** $(3, 2, 1)$ **C)** $(6, 4, -2)$ **D)** $(1, 2, 5)$ **E)** $(2, 2, 3)$
3. $3x + 2y - z = 5$ düzlemi aşağıdaki doğruların hangisine diktir?
A) $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{7}$ **B)** $x = 2 - y = 3 - z$ **C)** $\frac{x}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-2}$
D) $\frac{x-3}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$ **E)** $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = z - 2$
4. $xyzw$ dik koordinat sisteminde, $A(1, 2, 2, 1)$ noktasından geçen ve $\vec{N} = (3, 4, 1, 2)$ vektörüne dik olan hiperdüzlemin denklemi nedir?
A) $x + y + z + w = 6$ **B)** $3x + 4y + z + 2w = 0$ **C)** $x + 2y + 2z + w = 15$
D) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = z - 2 = \frac{w-1}{2}$ **E)** $3x + 4y + z + 2w = 15$
5. $x + y + 2z = 3$ düzlemine dik olan ve $A(1, 2, 0)$ noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.
A) $x - 1 = y - 2 = \frac{z}{2}$ **B)** $x = 2 - y, z = 0$ **C)** $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-2}$
D) $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{-1}$ **E)** $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = z - 2$
6. $A(0, 0, 0)$, $B(2, 1, 3)$, $C(4, -1, 3)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz.
A) $x - y + z = 0$ **B)** $-x - y + z = 0$ **C)** $3y + 2z = 0$
D) $x + y - z = 0$ **E)** $x - y - z = 0$
7. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3}$, $z = 1$ doğrusunu üzerinde bulunduran ve $P = (1, -1, 2)$ noktasından geçen düzlem denklemini bulunuz.
A) $x + y + z = 0$ **B)** $3x - 2y + 2z = 9$ **C)** $-3x + 2y + 2z = -1$
D) $3x + y + 2z = 6$ **E)** $x + 2y + z = 1$

8. $2x - y + z = 3$ ve $x + y + 3z = 5$ düzlemlerinin arakesit doğrusu, aşağıdaki vektörlerin hangisine paraleldir?
A) $(3, -4, -5)$ **B)** $(3, 2, 1)$ **C)** $(-4, -5, 3)$ **D)** $(3, 4, 5)$ **E)** $(2, 2, 3)$
9. $x - y + z = 3$ ve $x + y + 3z = 5$ düzlemlerinin arakesit doğrusu aşağıdakilerden hangisidir?
A) $\frac{x-2}{2} = y = 1 - z$ **B)** $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = z$ **C)** $\frac{x-2}{2} = y = \frac{1-z}{2}$
D) $\frac{x-2}{2} = y = z - 1$ **E)** $\frac{x-2}{2} = y = \frac{z-1}{2}$
10. $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$ doğrusuna paralel olan ve $(1, 2, 0)$ noktasından geçen doğrunun $P = (1, 0, 2)$ noktasına olan uzaklığını bulunuz.
A) $2\sqrt{2}$ **B)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C)** $\sqrt{2}$ **D)** $3\sqrt{2}$ **E)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
11. $A = (1, 1, 1)$ noktasından geçen ve $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{4}$ doğrusuna dik olan düzlemin denklemini bulunuz.
A) $x + y + z = 3$ **B)** $2x + 3y + 4z = 9$ **C)** $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$
D) $2x - 3y + 4z = 3$ **E)** $2x + 3y + 4z = 3$
12. $\frac{x-2}{k} = y = \frac{z}{2}$ ve $\frac{y-1}{2} = \frac{z}{3} = x$ doğrularını içinde bulunduran düzlem denklemini bulunuz.
A) $-3x + 6y - 5z = 0$ **B)** $3x - 6y + 5z = -6$ **C)** $2x + 3y + 4z = 3$
D) $3x + 6y - 5z = 6$ **E)** $x + y - z = 2$
13. $\frac{x-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$, $y = 2$ ve $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = 1 + z$ doğrularına paralel olan ve $P(1, 1, 1)$ noktasından geçen düzlem denklemini bulunuz.
A) $3x + 6y - 4z = 5$ **B)** $3x - 4y + 6z = 5$ **C)** $3x - 4y - 6z = -7$
D) $3x - 6y + 5z = 2$ **E)** $x + 3y - 4z = 0$
14. $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 3x + y + z = 6 \end{cases}$ doğrusunu içinde bulunduran ve $P(1, 2, 3)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.
A) $x - y + z = 2$ **B)** $x - y - z = -4$ **C)** $x + y - z = 0$
D) $-x + y + z = 4$ **E)** $x + y + z = 6$

UZAYDA DÜZLEM DENKLEMİ

243

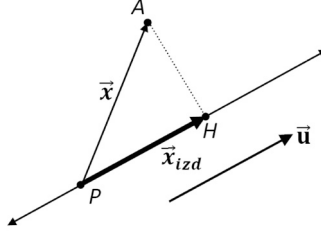
15. $x + y + 2z = 3$ ve $3x + 2y + z = 7$ düzlemlerinin arakesitinden ve $P(1, 1, 1)$ noktasından geçen düzleme, aşağıdaki vektörlerden hangisi diktir?
A) $(3, -2, 2)$ **B)** $(2, 2, -1)$ **C)** $(-4, 3, 3)$ **D)** $(4, 3, 3)$ **E)** $(4, -2, 3)$
16. $y = 2$ düzlemine dik olan ve $(1, -1, 2)$ noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.
A) $x = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ **B)** $x = 2 - y = 3 - z$ **C)** $x = 1, z = 2, y + 1 = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$
D) $y + 1 = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ **E)** $y = 2, x - 1 = z - 2 = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$
17. $\frac{x-1}{2} = y, z+2=0$ doğrusunun $x+y-2z=8$ düzlemi üzerindeki dik izdüşüm doğrusu, aşağıdaki vektörlerden hangisine paraleldir?
A) $(3, -2, -4)$ **B)** $(4, 2, -1)$ **C)** $(1, 3, -5)$ **D)** $(3, 1, -6)$ **E)** $(4, -2, 3)$
18. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{1-z}{2}$ doğrusuyla $2x + 3y + kz = 3$ düzleminin paralel olabilmesi için $k = ?$
A) 2 **B)** 3 **C)** 1 **D)** 4 **E)** 6
19. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{1-z}{2}$ doğrusuyla $2x + my + kz = 3$ düzleminin dik olabilmesi için $m + k = ?$
A) 0 **B)** 3 **C)** 1 **D)** 4 **E)** 5
20. $A(3, 1, 1)$ noktasının $2x - 3y + 6z - 4 = 0$ düzlemine olan uzaklığını bulunuz.
A) $\frac{3}{7}$ **B)** $\frac{5}{7}$ **C)** 1 **D)** 3 **E)** $\frac{5\sqrt{7}}{5}$
21. $A(2, 3, 1)$ noktasının $\frac{1-x}{4} = y-1 = \frac{z}{8}$ doğrusuna olan uzaklığını bulunuz.
A) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ **B)** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **C)** 1 **D)** $\frac{\sqrt{29}}{3}$ **E)** $\frac{5}{3}$
22. $3x - 4y + 12z - 8 = 0$ ve $-6x + 8y - 24z - 10 = 0$ düzlemleri arasındaki uzaklığı bulunuz.
A) $\frac{12}{13}$ **B)** $\frac{7}{13}$ **C)** 1 **D)** $\frac{3}{13}$ **E)** $\frac{5}{13}$

23. $x + y = 1$ ve $2x + y - 2z = 2$ düzlemleri arasındaki dar açığı bulunuz.
A) $\arccos(1/3)$ **B)** 90° **C)** 30° **D)** 45° **E)** 60°
24. $x = y = z$ doğrusunu içinde bulunduran ve $P(1, 2, 3)$ noktasından geçen düzlem denklemini bulunuz.
A) $x + y - z = 0$ **B)** $x + y - 2z = 3$ **C)** $x - 2y - z = 6$
D) $x + y - 2z = 0$ **E)** $x - 2y + z = 0$
25. $x + 2y + z = 3$ düzlemiyle, $\frac{x}{2} = y - 1 = z - 1$ doğrusu arasındaki açının kosinüsü kaçtır?
A) $\sqrt{5}/6$ **B)** $5/6$ **C)** $\sqrt{11}/6$ **D)** $1/6$ **E)** $-5/6$
26. Aşağıdaki doğruların hangisi $2x + y - z = 3$ düzlemine paraleldir?
A) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = 1 - z$ **B)** $\frac{x-1}{2} = 1 - y = z - 1$ **C)** $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}$
D) $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{1-z}{2}$ **E)** $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{6}$
27. $\frac{x-1}{2} = y = z$ doğrusu ile $x + y + kz = 0$ düzlemi birbirine paralel ise, k kaçtır?
A) -2 **B)** 2 **C)** 3 **D)** -3 **E)** 4
28. $\mathbb{R}^3$ uzayında aşağıdakilerden kaç tanesi bir düzlem denklemini belirtir?
I. $x + y + z = 5$ **II.** $\frac{x-1}{2} = y, z = 2$ **III.** $x = 1$
IV. $x = y = z$ **V.** $y = 2x - 1$ **VI.** $\varphi(u, v) = (u, v, u + v)$
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4
29. $A(1,1,1), B(1,2,3)$ ve $C(3,1,1)$ noktalarından geçen düzlem, aşağıdaki vektörlerin hangisine diktir?
A) $(0, 1, 2)$ **B)** $(0, 2, -1)$ **C)** $(1, 0, 2)$ **D)** $(4, 2, 0)$ **E)** $(1, 0, 0)$

İZDÜŞÜM - SİMETRİ - YANSIMA

Bir A Noktasının, Doğru Üzerindeki Dik İzdüşüm Noktasının Koordinatları

Bir A noktasının, verilen bir doğru üzerindeki izdüşüm noktası denilince, doğru üzerindeki A noktasına en yakın olan bir H noktası anlaşılır. AH doğrusu, izdüşüm alınan doğruya dik bir doğru oluşturur. Bu anafikir kullanılarak, bir noktanın bir doğru üzerine dik izdüşüm noktası kolayca elde edilebilir. Bunun yanında, bir noktanın, verilen doğru üzerindeki izdüşüm noktasını bulmak için, Vektörler konusunda ele aldığımız izdüşüm vektörünü kullanabiliriz. Bu bölümde, izdüşüm alınan nokta A ile izdüşüm noktası ise H ile gösterilecektir.



Buna göre, izdüşüm noktasını iki ana yöntemle elde etmek mümkündür.

Birinci Yöntem : Şekilden de takip edileceği gibi,

- i) H noktası, üzerine izdüşüm alındığı doğru denklemini sağlar
- ii) $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$ olmalıdır.

Bu iki bilgi kullanılarak, H noktası kolayca elde edilir.

Örnek 7.1 $y = 2x - 1$ doğrusunun, $A(1, 2)$ noktasına en yakın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm : Doğrunun doğrultmanı : $\vec{u} = (1, 2)$ 'dir. H noktası, doğru üzerinde olduğundan koordinatları $H(t, 2t - 1)$ formundadır.

$$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow (t - 1, 2t - 3) \perp (1, 2) \Leftrightarrow t - 1 + 4t - 6 = 0$$

eşitliğinden, $t = \frac{7}{5}$ olur. O halde, H noktasının koordinatları :

$$H(t, 2t - 1) = H(7/5, 9/5)$$

bulunur.

Örnek 7.2 $\frac{x-1}{2} = y = z$ doğrusunun, $A(1, 2, 3)$ noktasına en yakın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm : Doğrunun doğrultmanı : $\vec{u} = (2, 1, 1)$ 'dir. H noktası, doğru üzerinde olduğundan koordinatları

$$\frac{x-1}{2} = y = z = t \Rightarrow H(2t+1, t, t)$$

formundadır.

$$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow (2t, t-2, t-3) \perp (2, 1, 1) \Leftrightarrow 4t + t - 2 + t - 3 = 0,$$

eşitliğinden, $t = \frac{5}{6}$ olur. O halde, H noktasının koordinatları :

$$H(2t+1, t, t) = H(8/3, 5/6, 5/6)$$

bulunur.

İkinci Yöntem : Bu yöntemde ise, bir $\vec{x}$ vektörünün bir $\vec{y}$ vektörü üzerindeki izdüşüm vektörünün :

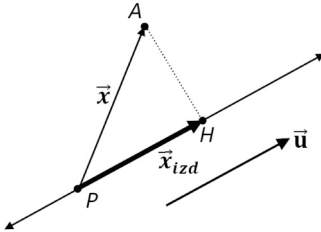
$$\vec{x}_{izd} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle} \vec{y}$$

olduğu kullanılarak yapılabilir. Burada, P noktası doğru üzerinde bir nokta olmak üzere, $\overrightarrow{PA}$ vektörünün doğrunun doğrultman vektörü üzerine izdüşümü kullanılarak, H noktası elde edilecektir. Aşağıdaki teoremden bu yöntemi kullandık.

7.1 ★ Teorem Bir A noktasından, doğrultusu $\vec{u}$ olan ve P noktasından geçen bir d doğrusu üzerine çizilen dikme ayağının koordinatları, $\vec{x} = \overrightarrow{PA}$ olmak üzere,

$$H = P + \frac{\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \vec{u}$$

ile bulunur.



Kanıt : Doğrunun herhangi bir P noktasını alalım. $\overrightarrow{PA} = \vec{x}$ diyelim. Doğrunun doğrultman vektörü de, $\vec{u}$ olsun. Buna göre, $\overrightarrow{PA} = \vec{x}$ vektörünün, $\vec{u}$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörü,

$$\vec{x}_{izd} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \vec{u}$$

olur. $\vec{x}_{izd} = \overrightarrow{PH}$ vektörü olduğundan,

$$H - P = \frac{\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \vec{u}$$

eşitliğinden, $H = P + \frac{\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \vec{u}$ elde edilir. ■

Örnek 7.3 $y = 2x - 1$ doğrusunun, $A(1, 2)$ noktasına en yakın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm : Doğrunun doğrultmanı : $\vec{u} = (1, 2)$ 'dir. Doğru üzerindeki herhangi bir nokta $P(1, 1)$ alınabilir. Buna göre, $\vec{x} = \vec{PA} = (0, 1)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} H &= P + \frac{\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \vec{u} \\ &= (1, 1) + \frac{2}{5} (1, 2) \\ &= \left(\frac{7}{5}, \frac{9}{5} \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 7.4 $\frac{x-1}{2} = y = z$ doğrusunun, $A(1, 2, 3)$ noktasına en yakın olduğu noktasının koordinatları bulunuz.

Çözüm : Doğru üzerindeki herhangi bir P noktası, $P(1, 0, 0)$ alınabilir. $\vec{u} = (2, 1, 1)$ ve $\vec{x} = \vec{PA} = (0, 2, 3)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} H &= P + \frac{\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \vec{u} \\ &= (1, 0, 0) + \frac{\langle (0, 2, 3), (2, 1, 1) \rangle}{\langle (2, 1, 1), (2, 1, 1) \rangle} (2, 1, 1) \\ &= \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6} \right) \end{aligned}$$

bulunur.

7.1) Alıştırma $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2}, z = 1$ doğrusunun, $A(1, 1, 1)$ noktasına en yakın olduğu noktasının koordinatları bulunuz.

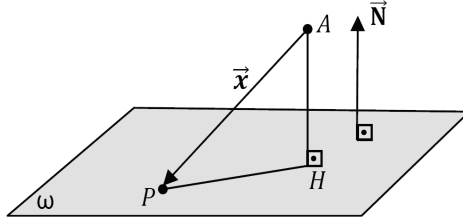
Yanıt : $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right)$.

7.2) Alıştırma $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{2}$ doğrusunun, $A(1, 1, 1)$ noktasına en yakın olduğu noktasının koordinatları bulunuz.

Yanıt : $\left(\frac{19}{9}, \frac{5}{9}, \frac{1}{9} \right)$.

Bir A Noktasının, Düzlem Üzerindeki Dik İzdüşüm Noktasının Koordinatları

Bir A noktasının, verilen bir düzlem üzerindeki izdüşüm noktası denilince, düzlem üzerindeki A noktasına en yakın olan bir H noktası anlaşılır. AH doğrusu, izdüşüm alınan doğruya dik, **yani düzlemin normaline paraleldir**. Bu anafikir kullanılarak, bir noktanın bir düzlem üzerine dik izdüşüm noktası kolayca elde edilebilir. Ayrıca, izdüşüm vektörü kullanılarak da H noktası bulunabilir.



Buna göre, izdüşüm noktasını iki ana yöntemle elde etmek mümkündür.

Birinci Yöntem : Şekilden de takip edileceği gibi,

i) $\overrightarrow{AH} \parallel \vec{N}$ olmalıdır.

ii) H üzerine izdüşüm alındığı düzlem denklemini sağlar.

Bu iki bilgi kullanılarak, H noktası kolayca bulunabilir.

Bu yöntemi, şu şekilde de uygulayabiliriz. A noktasından geçen ve doğrultusu $\vec{u} = \vec{N}$ olan, doğrunun denklemi bulunur. Bu doğru ile düzlemin kesişimi istenen noktadır.

Örnek 7.5 $x + y - 2z = 5$ düzleminin, $A(1, 2, 3)$ noktasına en yakın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm : İstenen nokta $H(a, b, c)$ olsun. $\overrightarrow{AH} = (a - 1, b - 2, c - 3)$ vektörü, düzlemin normaline, yani $\vec{N} = (1, 1, -2)$ vektörüne paralel olduğundan,

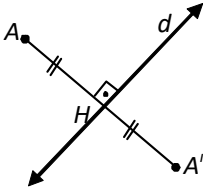
$$\overrightarrow{AH} \parallel \vec{N} \Leftrightarrow \frac{a-1}{1} = \frac{b-2}{1} = \frac{c-3}{-2} = k$$

olmalıdır. Buradan, $H(a, b, c) = H(k+1, k+2, -2k+3)$ olur. H noktası düzlem denklemini sağlayacağından,

$$(k+1) + (k+2) - 2(-2k+3) = 5$$

eşitliğinden, $k = \frac{4}{3}$ olur. O halde, $H = \left(\frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{1}{3}\right)$ elde edilir.

Bir noktanın, bir doğruya göre simetriği olan nokta



$\mathbb{R}^n$ uzayında verilen bir d doğrusunun doğrultu vektörü $\vec{u}$ ve A noktasının d doğrusuna göre simetriği de A' noktası olsun. Doğruya göre simetrisinin sağlanabilmesi için, $\overrightarrow{AA'}$ vektörü, doğrunun doğrultusuna dik olmalı ve A ile A' 'nin orta noktası doğru üzerinde bulunmalıdır. Buna göre,

$$\vec{n} = \overrightarrow{AA'} \text{ olmak üzere,}$$

$$\text{i) } \vec{n} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{n} \rangle = 0^8$$

$$\text{ii) } H = \frac{A + A'}{2}$$

eşitlikleri kullanılarak elde edilen denklemlerin çözümü, bize A' noktasını verir.

Bu yöntemin yanında, izdüşüm vektörü kullanılarak da simetri noktası bulunabilir. Bununla ilgili Teorem 7.3 ve Teorem 7.4 aşağıda verilmiştir.

Örnek 7.10 $A(1, 2, 3)$ noktasının $x = y = z$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz. (2013 - ÖABT)

Çözüm : Doğrunun doğrultmanı $\vec{u} = (1, 1, 1)$ 'dir. A noktasının simetriği olan noktayı da $A'(a, b, c)$ ile gösterelim. Buna göre, $\vec{n} = \overrightarrow{AA'} = (a - 1, b - 2, c - 3)$ olur.

i) $\langle \vec{u}, \vec{n} \rangle = 0$ eşitliğinden, $a + b + c = 6$ olur.

ii) $H = \frac{A + A'}{2} = \left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2}, \frac{c+3}{2} \right)$ noktası $x = y = z$ doğru denklemini sağlamalıdır. Buradan,

$$\frac{a+1}{2} = \frac{b+2}{2} = \frac{c+3}{2} = k$$

diyelim. $a = 2k - 1$, $b = 2k - 2$ ve $c = 2k - 3$ eşitlikleri, $a + b + c = 6$ eşitliğinde yazılırsa, $6k = 12$ eşitliğinden $k = 2$ olur ki, buradan $A'(3, 2, 1)$ elde edilir.

Örnek 7.11 $A(1, 2)$ noktasının $y = 3x - 2$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm : Doğrunun doğrultusunun $\vec{u} = (1, 3)$ olduğu kolayca görülebilir. $A'(a, b)$ olsun. $\vec{n} = \overrightarrow{AA'} = (a - 1, b - 2)$ olur. Buna göre,

i) $\langle \vec{u}, \vec{n} \rangle = 0$ eşitliğinden, $a - 1 + 3b - 6 = 0 \Rightarrow a + 3b = 7$ olur.

⁸ Düzlemde, iç çarpımı kullanmak yerine, d doğrusunun eğimiyle, AA' doğrusunun eğiminin çarpımının -1 olması gerektiği kullanılabilir.

ii) $H = \frac{A + A'}{2} = \left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2} \right)$ noktası $y = 3x - 2$ doğru denklemini sağlamalıdır. Buradan, $b = 3a - 3$ elde edilir. Sonuç olarak,

$$a + 3b = 7 \text{ ve } b = 3a - 3$$

eşitliklerinden $a = \frac{8}{5}$, $b = \frac{9}{5}$ olur. Yani, $A' (8/5, 9/5)$ 'tir.

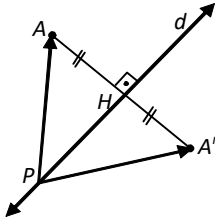
7.6) Aıştırma $\mathbb{R}^3$ uzayında $A(1, 1, 1)$ noktasının $\frac{x-1}{2} = y = z$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Yanıt : $\left(\frac{7}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3} \right)$.

7.3) ★Teorem Herhangi bir A noktasının, doğrultusu $\vec{u}$ olan ve P noktasından geçen bir doğruya göre simetriği olan noktanın koordinatları

$$A' = 2 \frac{\langle \vec{PA}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \vec{u} + 2P - A$$

ile bulunur.



Kanıt : Vektörlerde toplama işlemine göre,

$$\vec{PA'} = \vec{PH} + \vec{HA'} = \vec{PH} + \frac{1}{2} \vec{AA'}$$

şeklinde ifade edebiliriz. $\vec{PH}$ vektörü, $\vec{PA}$ vektörünün, $\vec{u}$ vektörü üzerine dik izdüşümü olduğundan,

$$\vec{PH} = \frac{\langle \vec{PA}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \vec{u}$$

yazılabilir. Böylece,

$$A' - P = \frac{\langle \vec{PA}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \vec{u} + \frac{1}{2} (A' - A),$$

$$A' = 2 \frac{\langle \vec{PA}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \vec{u} + 2P - A$$

elde edilir. ■

Şimdi üstteki örnekleri bu teoremi kullanarak yapalım.

Örnek 7.12 $A(1, 2, 3)$ noktasının $x = y = z$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm : $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $P(0, 0, 0)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} A' &= 2 \frac{\langle \vec{PA}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \vec{u} + 2P - A \\ &= 2 \frac{\langle (1, 2, 3), (1, 1, 1) \rangle}{\langle (1, 1, 1), (1, 1, 1) \rangle} (1, 1, 1) + 2(0, 0, 0) - (1, 2, 3) = (3, 2, 1) \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 7.13 $\mathbb{R}^4$ uzayında $A(1, 1, 1, 3)$ noktasının

$$\frac{x-1}{2} = y = z = \frac{w-1}{2}$$

doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm : $\vec{u} = (2, 1, 1, 2)$, $P(1, 0, 0, 1)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} A' &= 2 \frac{\langle (0, 1, 1, 2), (2, 1, 1, 2) \rangle}{\langle (2, 1, 1, 2), (2, 1, 1, 2) \rangle} (2, 1, 1, 2) + 2(1, 0, 0, 1) - (1, 1, 1, 3) \\ &= \left(\frac{17}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{7}{5} \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

7.7) Alıştırma $\mathbb{R}^4$ uzayında $A(1, 0, 1, 0)$ noktasının $\frac{x-1}{2} = y = z = \frac{w-1}{2}$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Yanıt : $\left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{8}{5} \right).$

7.8) Alıştırma $A(1, 2)$ noktasının $y = 3x - 2$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Yanıt : $\left(\frac{8}{5}, \frac{9}{5} \right).$

Düzlemde Bir Noktanın Bir Doğruya Göre Simetriği

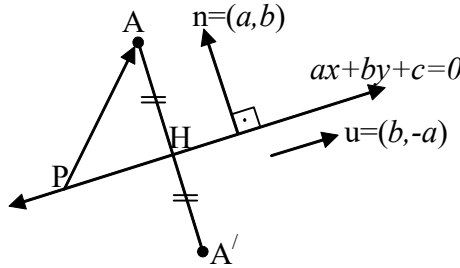
Yukarıdaki formüller yardımıyla, n boyutlu uzayda bir noktanın bir doğruya göre simetriği bulunabilir. Aşağıdaki teorem ise, düzlemde geçerli olan özel bir durumdur.

7.4 ★ Teorem Düzlemde bir $A(x_0, y_0)$ noktasının, $ax + by + c = 0$ doğrusuna göre, simetriği :

$$A' = (x_0, y_0) - \frac{2(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} (a, b)$$

dir.

Kanıt :



$ax + by + c = 0$ doğrusunun doğrultman vektörü : $\vec{u} = (b, -a)$ vektörüdür. Bu vektöre dik olan vektörü $\vec{n} = (a, b)$ ile gösterelim. P noktası, $ax + by + c = 0$ doğrusu üzerinde bir nokta olmak üzere, $\vec{HA}$ vektörü, $\vec{PA}$ vektörünün $\vec{n}$ vektörü üzerine dik izdüşüm vektörüdür. Buna göre,

$$\vec{HA} = \frac{\langle \vec{PA}, \vec{n} \rangle}{\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle} \vec{n}$$

yazılabilir. $\vec{AA'} = 2\vec{AH}$ olduğundan,

$$A' - A = -2 \frac{\langle \vec{PA}, \vec{n} \rangle}{\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle} \vec{n} \text{ ve } A' = A - 2 \frac{\langle \vec{PA}, \vec{n} \rangle}{\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle} \vec{n}$$

elde edilir. $ax + by + c = 0$ üzerindeki P noktası, $P(x_1, y_1)$ olsun.

$$\vec{PA} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1) \text{ ve } ax_1 + by_1 + c = 0$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} A' &= (x_0, y_0) - 2 \frac{ax_0 + by_0 - (ax_1 + by_1)}{a^2 + b^2} (a, b) \\ &= (x_0, y_0) - \frac{2(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} (a, b) \end{aligned}$$

bulunur. ■

Örnek 7.14 $A(1, 2)$ noktasının $y = 3x - 2$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm : $3x - y - 2 = 0$ doğru denkleminde, $a = 3$ ve $b = -1$ 'dir. Buna göre,

$$A' = (1, 2) - \frac{2(3 \cdot 1 - 2 - 2)}{10} (3, -1) = \left(\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

elde edilir.

Örnek 7.15 Düzlemde herhangi bir $A(x_0, y_0)$ noktasının, $y = x$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın, $A'(y_0, x_0)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm : Teorem kullanılırsa,

$$A = (x_0, y_0) - \frac{2(x_0 - y_0)}{2} (1, -1) = (y_0, x_0)$$

elde edilir.

7.9) Alıştırma $A(1, 1)$ noktasının, $y = x + 2$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Yanıt : $(1, 1) - \frac{2(1 - 1 + 2)}{2} (1, -1) = (-1, 3)$.

7.10) Alıştırma Düzlemde herhangi bir $A(x_0, y_0)$ noktasının, $y = mx + n$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın, koordinatlarını bulunuz.

Örnek 7.16 $A(t, t - 1)$ noktasının $y = 2x + 1$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm : $2x - y + 1 = 0$ doğru denkleminde, $a = 2$ ve $b = -1$ 'dir. Buna göre,

$$A' = (t, t - 1) - \frac{2(2 \cdot t - (t - 1) + 1)}{5} (2, -1) = \left(\frac{t - 8}{5}, \frac{7t - 1}{5}\right)$$

elde edilir. Buradan, A noktası aslında, $y = x - 1$ doğrusunu ifade etmektedir. A' noktası ise,

$$t = 5x + 8 = \frac{5y + 1}{7} \Rightarrow 7x - y + 11 = 0$$

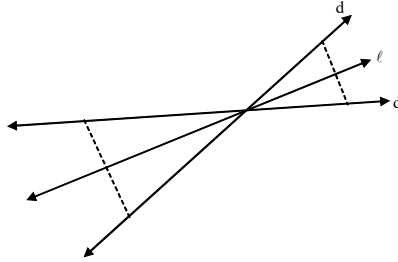
doğrusunu ifade etmektedir. Bu soruda, aslında $y = x - 1$ doğrusunun, $y = 2x + 1$ doğrusuna göre simetriği bulunmuş oldu.

Bir Doğrunun Bir Doğruya Göre Simetriği

Bir d doğrusunun, bir ℓ doğrusuna göre simetriği d' doğrusu olsun. d' doğrusunun denklemini bulmak için, d doğrusu üzerindeki herhangi bir nokta parametrik olarak yazılır. Bu noktanın, ℓ doğrusuna göre simetriği bulunarak, d' doğrusu üzerindeki bu noktayı ifade eden doğru, parametre yok edilerek bulunur.

Ayrıca, bir doğrunun simetriği olan bir doğru için, aşağıdakilere de dikkat ediniz.

1. d doğrusu, ℓ doğrusu ile bir K noktasında kesişiyorsa, d' doğrusu da bu kesişme noktasından geçmesi gerekir.
2. d doğrusu üzerindeki, herhangi bir P noktasının, ℓ doğrusuna göre simetriği P' noktası ise, P' noktası da d' doğrusunun denklemini sağlamalıdır.
3. ℓ doğrusu, d ve d' doğrusunun açıortay doğrusudur.
4. Düzlemde, d' doğrusunun denklemi : $d + k\ell = 0$ doğru ailelerinin içinden bir doğrudur.



Örnek 7.17 $y = 2x - 1$ doğrusunun, $y = x + 1$ doğrusuna göre simetriğini bulunuz.

Çözüm : $y = 2x - 1$ doğrusu üzerindeki bir nokta, parametrik olarak $A(t, 2t - 1)$ şeklinde yazılabilir. Şimdi, $A'(a, b)$ noktasının koordinatlarını bulalım. $y = x + 1$ doğrusunun doğrultmanı $\vec{u} = (1, 1)$ olduğundan,

$$\text{i) } \overrightarrow{AA'} \perp (1, 1) \Leftrightarrow (a - t, b - 2t + 1) \perp (1, 1) \Leftrightarrow a + b = 3t - 1 \quad (*)$$

olacaktır. Diğer yandan, $(A + A')/2$ noktası, $y = x + 1$ doğrusu üzerinde olacağından,

$$\text{ii) } \frac{b + 2t - 1}{2} = \frac{a + t}{2} + 1 \Rightarrow a - b = t - 3 \quad (**)$$

olacaktır. Buna göre, (*) ve (**) eşitliklerinden,

$$a = 2t - 2 \text{ ve } b = t + 1$$

elde edilir. A' noktasının parametrik koordinatını $x = 2t - 2$, $y = t + 1$ bulduk. O halde istenen doğrunun denklemi :

$$\frac{x + 2}{2} = \frac{y - 1}{1} = t \text{ veya } x - 2y + 4 = 0$$

şeklinde buluruz.

Örnek 7.18 *Uzayda $\frac{x-1}{2} = y = z$ doğrusunun, $x-1 = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$ doğrusuna göre simetriğini bulunuz.*

Çözüm : $\frac{x-1}{2} = y = z$ doğrusu üzerindeki bir noktayı parametrik olarak, $A(2t+1, t, t)$ şeklinde yazabiliriz. Bu noktanın, $x-1 = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$ doğrusuna göre simetriğini parametrik olarak bulacağız. $\vec{u} = (1, 2, 2)$ 'dir. Simetrik nokta $A'(a, b, c)$ olmak üzere,

i) $\overrightarrow{AA'} \perp (1, 2, 2) \Leftrightarrow (a-2t-1, b-t, c-t) \perp (1, 2, 2) \Leftrightarrow a+2b+2c=6t+1 (*)$

olacaktır. Diğer yandan, $\frac{A+A'}{2}$ noktası, $x-1 = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$ doğrusu üzerinde olacağından,

ii) $\frac{a+2t+1}{2} - 1 = \frac{b+t}{4} = \frac{c+t}{4} = k \quad (**)$

olacaktır. Buna göre, (*) ve (**) eşitliklerinden,

$$2(k+1) - 2t - 1 + 2(4k-t) + 2(4k-t) = 6t - 1$$

olur ve buradan,

$$k = \frac{6t-1}{9}$$

bulunur. Yani,

$$A' \left(\frac{7-6t}{9}, \frac{15t-4}{9}, \frac{15t-4}{9} \right)$$

olur ki, simetri doğrusunun denklemi :

$$\frac{9x-7}{-6} = \frac{9y+4}{15} = \frac{9z+4}{15}$$

bulunur.

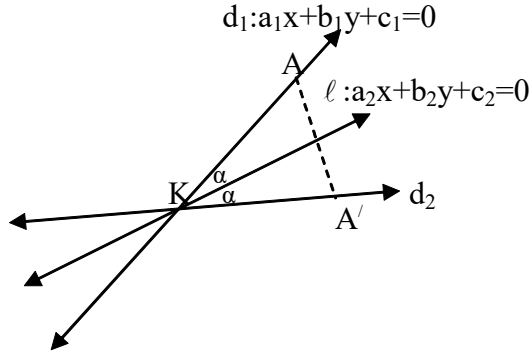
Düzlemde Bir Doğrunun Bir Doğruya Göre Simetriği

Düzlemde, bir doğrunun başka doğruya göre simetriğini, doğru ailesi ve doğruların eğimlerinden elde edeceğimiz eşitlikler yardımıyla bulabiliriz. Bu yöntemi, en genel şekilde aşağıdaki teoremle verelim.

7.5 ★ Teorem *Düzlemde, $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ doğrusunun, $\ell : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ doğrusuna göre simetriği,*

$$a_1x + b_1y + c_1 = 2 \frac{(a_1a_2 + b_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} (a_2x + b_2y + c_2)$$

doğrusudur.



Kanıt : Simetri doğrusu, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ doğrularının arakesitinden geçen,

$$(a_1x + b_1y + c_1) + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

formunda bir doğrudur. Bu doğrunun eğiminin,

$$m_2 = -\frac{a_1 + a_2k}{b_1 + b_2k} \quad (*)$$

olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan, simetri doğrusu açıortay doğrusu olduğundan,

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{m_1 - m_\ell}{1 + m_1 m_\ell} = \frac{\frac{-a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}}{1 + \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}} = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_1 a_2} \\ \tan \alpha &= \frac{m_\ell - m_2}{1 + m_2 m_\ell} = \frac{\frac{-a_2}{b_2} - m_2}{1 - m_2 \frac{a_2}{b_2}} = \frac{-a_2 - m_2 b_2}{b_2 - m_2 a_2} \end{aligned}$$

açıların eşitliğinden,

$$\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1 b_2 + a_1 a_2} = \frac{-a_2 - m_2 b_2}{b_2 - m_2 a_2}$$

olur ki, buradan,

$$m_2 = \frac{a_1 a_2^2 - a_1 b_2^2 + 2a_2 b_1 b_2}{a_2^2 b_1 - 2a_1 a_2 b_2 - b_1 b_2^2}$$

elde edilir. Buradan, (*) eşitliği gözönüne alınırsa,

$$\frac{-a_1 - a_2 k}{b_1 + b_2 k} = \frac{a_1 a_2^2 - a_1 b_2^2 + 2a_2 b_1 b_2}{a_2^2 b_1 - 2a_1 a_2 b_2 - b_1 b_2^2}$$

eşitliğinden,

$$k = \frac{-2(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{(a_2^2 + b_2^2)}$$

bulunur. ■

Örnek 7.19 $3x + 2y = 5$ doğrusunun $y - x = 2$ doğrusuna göre simetriğinin denklemini bulunuz. (ÖABT 2016)

Çözüm : 1. Yol. $3x + 2y - 5 = 0$ ve $x - y + 2 = 0$ doğrularına göre, $a_1 = 3, b_1 = 2, a_2 = 1$ ve $b_2 = -1$ 'dir. O halde,

$$(a_1x + b_1y + c_1) = 2 \frac{(a_1a_2 + b_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} (a_2x + b_2y + c_2)$$

formülü kullanılırsa,

$$3x + 2y - 5 = 2 \cdot \frac{3 - 2}{1 + 1} \cdot (x - y + 2) = x - y + 2$$

eşitliğinden, simetri doğrusu : $2x + 3y - 7 = 0$ elde edilir.

2. Yol. Simetri doğrusunun denklemi :

$$(3x + 2y - 5) + k(y - x - 2) = 0 \quad (*)$$

formundadır. k 'yı bulmak için, simetri doğrusu üzerinde, kesişim noktasından farklı bir nokta bulmak yeterlidir. $3x + 2y = 5$ doğrusu üzerindeki bir nokta alalım. Kolaylık için, $P(1, 1)$ noktası alınabilir. Bu noktanın $y = x + 2$ doğrusuna göre simetriği olan $P'(a, b)$ noktasını bulalım.

i) $\frac{(1, 1) + (a, b)}{2} = \left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$ noktası, $y = x + 2$ denklemini sağlar. Buradan,

$$b - a = 4$$

elde edilir.

ii) $\overrightarrow{PP'}$ vektörü, $y = x + 2$ doğrusuna dik olmalıdır. $\vec{u} = (1, 1)$ olduğundan,

$$\overrightarrow{PP'} \perp \vec{u} \Leftrightarrow (a - 1) + (b - 1) = 0 \Rightarrow a + b = 2$$

olacaktır. Bu iki denklemden, $b = 3$ ve $a = -1$, yani $P(-1, 3)$ bulunur. Bu nokta (*) eşitliğini sağlamalıdır. Buna göre,

$$(-3 + 6 - 5) + k(3 + 1 - 2) = 0$$

eşitliğinden, $k = 1$ ve $(3x + 2y - 5) + (y - x - 2) = 2x + 3y - 7 = 0$ elde edilir.

3. Yol. Doğrunun parametrik denklemi $x = 2t$ ve $y = -3t + \frac{5}{2}$ alınabilir. Bu noktanın, simetriğini

$$A' = (x_0, y_0) - \frac{2(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} (a, b)$$

eşitliğinden,

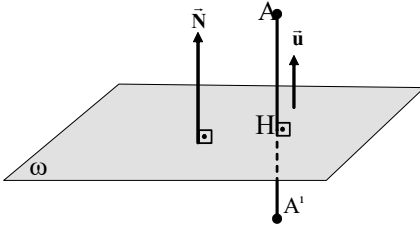
$$A' = \left(2t, -3t + \frac{5}{2}\right) - \frac{2\left(2t - \left(-3t + \frac{5}{2}\right) + +2\right)}{2} (1, -1) = \left(\frac{1}{2} - 3t, 2t + 2\right)$$

bulunur. Buradan, $t = \frac{x - 1/2}{-3} = \frac{y - 2}{2}$ eşitliğinden, $2x + 3y - 7 = 0$ doğrusu elde edilir.

7.11) Alıştırma $x + 2y = 1$ doğrusunun $x + y = 1$ doğrusuna göre simetriği olan doğrunun denklemini bulunuz.

Yanıt : $2x + y - 2 = 0$.

Bir Noktanın Bir Düzleme Göre Simetriği



Bir A noktasının bir ω düzlemine göre simetriği denilince, iki koşul sağlanmalıdır.

1. $\frac{A + A'}{2} = H$ noktası düzlem denklemini sağlamalıdır.
2. $\overrightarrow{AA'} \parallel \vec{N}$ paralelliği vardır. $\overrightarrow{AA'}$ vektörü düzleme dik olmalıdır. Yani, $\overrightarrow{AA'} = \lambda \vec{N}$ sağlanmalıdır.

Örnek 7.20 $A(1, 2, 3)$ noktasının $x + y + z = 0$ düzlemine göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz. (2013 ÖABT)

Çözüm : $A'(a, b, c)$ olduğunu kabul edelim.

i) $H = \frac{A + A'}{2} = \left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2}, \frac{c+3}{2} \right)$ noktası $x + y + z = 0$ denklemini sağlar. O halde,

$$\frac{a+1}{2} + \frac{b+2}{2} + \frac{c+3}{2} = 0 \Rightarrow a + b + c = -6$$

olur.

ii) $\overrightarrow{AA'} \parallel \vec{N}$ olmalıdır. Buna göre, $\vec{N} = (1, 1, 1)$ olduğundan,

$$\frac{a-1}{1} = \frac{b-2}{1} = \frac{c-3}{1} = k$$

olmalıdır. Buna göre, $(k+1) + (k+2) + (k+3) = -6$ eşitliğinden, $k = -4$ olur. Buna göre, $A'(-3, -2, -1)$ bulunur.

Örnek 7.21 $A(1, 2, 3)$ noktasının $x + y + z = 5$ düzlemine göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm : A' 'nin simetriği olan noktanın koordinatları $A'(a, b, c)$ olsun.

i) $\frac{A + A'}{2}$ düzlem denklemini sağlar. $\frac{a+1}{2} + \frac{b+2}{2} + \frac{c+3}{2} = 5$ ise $a + b + c = 4$ olur.

ii) $\overrightarrow{AA'} \parallel \vec{N} = (1, 1, 1)$ ise $\frac{a-1}{1} = \frac{b-2}{1} = \frac{c-3}{1} = k$ olur. Buradan,

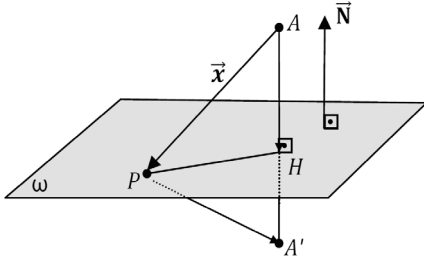
$$(k+1) + (k+2) + (k+3) = 4 \Rightarrow k = -2/3 \Rightarrow A' \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3} \right)$$

bulunur.

7.6 ★ Teorem Bir A noktasının, normali $\vec{N}$ olan ve P noktasından geçen bir ω düzlemine göre simetriği olan noktanın koordinatları

$$A' = A + 2 \frac{\langle \overrightarrow{AP}, \vec{N} \rangle}{\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle} \vec{N}$$

ile bulunur.



Kanıt : Vektörlerde toplama işlemine göre,

$$\overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{AH}$$

şeklinde ifade edebiliriz. $\overrightarrow{AH}$ vektörü, $\overrightarrow{AP}$ vektörünün, $\vec{N}$ vektörü üzerine dik izdüşümü olduğundan,

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\langle \overrightarrow{AP}, \vec{N} \rangle}{\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle} \vec{N} \text{ yazılabilir. Buradan,}$$

$$A' - P = A - P + 2 \frac{\langle \overrightarrow{AP}, \vec{N} \rangle}{\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle} \vec{N} \Rightarrow A' = A + 2 \frac{\langle \overrightarrow{AP}, \vec{N} \rangle}{\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle} \vec{N}$$

elde edilir. ■

Örnek 7.22 $A(1, 2, 3)$ noktasının $x + y + z = 5$ düzlemine göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm : Düzlemin normali $\vec{N} = (1, 1, 1)$ vektörüdür. Düzlem üzerindeki bir nokta $P(1, 2, 2)$ alınabilir. Buna göre, $\overrightarrow{AP} = (0, 0, -1)$ olduğundan,

$$A' = A + 2 \frac{\langle \overrightarrow{AP}, \vec{N} \rangle}{\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle} \vec{N} = (1, 2, 3) + 2 \frac{\langle (0, 0, -1), (1, 1, 1) \rangle}{\langle (1, 1, 1), (1, 1, 1) \rangle} (1, 1, 1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3} \right)$$

bulunur.

7.12) Alıştırma $A(1, 2, 3)$ noktasının $x + 2y - z = 5$ düzlemine göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Yanıt : $(2, 4, 2)$.

7.13) Alıştırma $A(1, 2, 3)$ noktasının $x + 3y + 2z = 5$ düzlemine göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Yanıt : $(1/7, -10/7, 5/7)$.

Bir Doğrunun Bir Düzleme Göre Simetriği

Doğru üzerindeki alınan herhangi bir parametrik noktanın, düzleme göre simetriği olan nokta bulunarak, simetri doğrusu kolayca elde edilebilir.

Örnek 7.23 *Uzayda $\frac{x-1}{2} = y = z$ doğrusunun, $x + z = 1$ düzlemine göre simetriğini bulunuz.*

Çözüm : Doğru üzerindeki herhangi bir noktayı parametrik olarak,

$$A(2t + 1, t, t)$$

biçiminde yazabiliriz. Şimdi, A' simetri noktasını belirleyelim. Klasik yolla belirleyebiliriz. Fakat, Teorem 7.6'yı kullanalım. $\vec{N} = (1, 0, 1)$ ve $P(1, 0, 0)$ alalım.

$\vec{AP} = (-2t, -t, -t)$ olduğundan,

$$A' = A + 2 \frac{\langle \vec{AP}, \vec{N} \rangle}{\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle} \vec{N} = (2t + 1, t, t) + 2 \frac{-4t}{2} (1, 0, 1) = (1 - t, t, -3t)$$

elde edilir. O halde simetri doğrusu :

$$t = 1 - x = y = z$$

olarak bulunur.

7.14) Alıştırma *Uzayda $\frac{x}{2} = y = z$ doğrusunun, $x + y + z = 0$ düzlemine göre simetriğini bulunuz.*

Yanıt : $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{5}$.

7.15) Alıştırma *Uzayda $\frac{x-1}{2} = y = z$ doğrusunun, xoy düzlemine göre simetriğini bulunuz.*

Yanıt : $\frac{x-1}{2} = y = -z$.

Çözümlü Problemler

7.1 Problem : $A(1, 2, 3)$ noktasının $x + y + z = 5$ düzlemine göre simetriği olan noktanın koordinatları $P(a, b, c)$ ise $3a + 6b + 9c$ kaçtır?

Çözüm : P noktası, A noktasının düzleme göre simetriği olduğundan, $\frac{A+P}{2}$ düzlem denklemini sağlar. Buradan,

$$\frac{a+1+b+2+c+3}{2} = 5 \Rightarrow a+b+c = 4 \quad (*)$$

olması gerekir. Diğer yandan, $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{N} = (1, 1, 1)$ eşitliğinden, paralellik kullanılırsa

$$\frac{a-1}{1} = \frac{b-2}{1} = \frac{c-3}{1} = \lambda$$

olmalıdır. (*) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\lambda + 1 + \lambda + 2 + \lambda + 3 = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{-2}{3}$$

olur ki, buradan $P(a, b, c) = P(1/3, 4/3, 7/3)$ elde edilir. O halde,

$$3a + 6b + 9c = 3 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{4}{3} + 9 \cdot \frac{7}{3} = 30$$

bulunur.

7.2 Problem : $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ çemberinin, $y = 2x - 1$ doğrusuna göre simetriği nedir?

Çözüm : Çemberin merkezinin, yani $M(1, 2)$ noktasının simetriğini bulmak yeterlidir. $\vec{u} = (1, 2)$ dir. $M'(a, b)$ olsun.

$$\overrightarrow{MM'} = (a-1, b-2)$$

olur. Buna göre,

$$\text{i) } \langle \vec{u}, \overrightarrow{MM'} \rangle = 0 \text{ eşitliğinden, } a-1+2b-4=0 \Rightarrow a+2b=5 \text{ olur.}$$

$$\text{ii) } H = \frac{M+M'}{2} = \left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2} \right) \text{ ise } b+2=2(a+1)-2 \Rightarrow b-2a=-2$$

olur.

Buradan, $5b=8 \Rightarrow b=8/5$ ve $a=9/5$ olacağından, simetri çemberi,

$$\left(x - \frac{9}{5} \right)^2 + \left(y - \frac{8}{5} \right)^2 = 4$$

bulunur.

7.3 Problem : $A(1, 2, 3)$ noktası, $\frac{x}{2} = y, z = 1$ doğrusu üzerindeki hangi noktaya en yakındır?

Çözüm : İstenen nokta doğru üzerinde olduğundan, $\frac{x}{2} = y = \lambda, z = 1$ ise, en yakın noktanın koordinatları

$$H(2\lambda, \lambda, 1)$$

formundadır. $\overrightarrow{AH} = (2\lambda - 1, \lambda - 2, 1 - 3)$ vektörü $\vec{u} = (2, 1, 0)$ doğrultmanına dik olduğundan,

$$2(2\lambda - 1) + (\lambda - 2) = 0$$

eşitliğinden $\lambda = 4/5$ olur. Buradan, en yakın nokta

$$H\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)$$

elde edilir.

7.4 Problem : $\mathbb{R}^4$ uzayında $A(1, 1, 1, 3)$ noktasının $\frac{x-1}{2} = y = z = \frac{w-1}{2}$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm : Doğrunun doğrultmanı $\vec{u} = (2, 1, 1, 2)$ 'dir. A noktasının simetriği olan nokta da, $A'(a, b, c, d)$ ise,

$$\vec{n} = \overrightarrow{AA'} = (a - 1, b - 1, c - 1, d - 3)$$

olur. Buna göre

i) $\langle \vec{u}, \vec{n} \rangle = 0$ ise $2a + b + c + 2d = 10$ olur.

ii) $H = \frac{A + A'}{2} = \left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}, \frac{c+1}{2}, \frac{d+3}{2}\right)$ noktası doğrunun üzerinde olmalı.

Buradan,

$$\frac{\frac{a+1}{2} - 1}{2} = \frac{b+1}{2} = \frac{c+1}{2} = \frac{\frac{d+3}{2} - 1}{2} = \lambda$$

diyelim.

$$a = 4\lambda + 1, b = c = 2\lambda - 1 \text{ ve } d = 4\lambda - 1$$

olur. Bu eşitlikleri,

$$2a + b + c + 2d = 10$$

denkleminde yazarsak, $20\lambda = 12$ ve $\lambda = 3/5$ olur. Buna göre A' noktası :

$$A'\left(\frac{17}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$$

elde edilir.

7.16) Alıştırma $\mathbb{R}^4$ uzayında $A(1, 1, 1, 1)$ noktasının $\frac{x-1}{2} = y = z = \frac{w-1}{2}$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

Yanıt : $\left(\frac{9}{5}, \frac{-3}{5}, \frac{-3}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

7.5) Problem : $x = y, z = 1$ doğrusunun, $x + y + z = 1$ düzlemine göre simetriği nedir?

Çözüm : Doğru üzerindeki herhangi bir noktayı parametrik olarak,

$$A(t, t, 1)$$

biçiminde yazabiliriz. Şimdi, $A'(a, b, c)$ simetri noktasını belirleyelim.

i) $\frac{A + A'}{2}$ düzlem denklemini sağlamalı. Buradan,

$$\frac{a + t + b + t + c + 1}{2} = 1 \Rightarrow a + b + c = 1 - 2t$$

elde edilir.

ii) $\vec{N} \parallel \overrightarrow{AA'}$ ve $\vec{N} = (1, 1, 1)$ olduğundan,

$$\frac{a-t}{1} = \frac{b-t}{1} = \frac{c-1}{1} = \lambda$$

olmalıdır. Buna göre,

$$(\lambda + t) + (\lambda + t) + (\lambda + 1) = 1 - 2t$$

eşitliğinden,

$$\lambda = \frac{-4t}{3}$$

bulunur. O halde, $A'\left(\frac{-t}{3}, \frac{-t}{3}, \frac{3-4t}{3}\right)$ elde edilir. Yani, simetri doğrusu :

$$t = -3x = -3y = \frac{3z-3}{-4} \text{ veya } x = y = \frac{z-1}{4}$$

elde edilir.

7.6) Problem : $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ küresinin yoz düzlemine göre simetriği nedir?

Çözüm : Kürenin merkezi, $M(1, 0, 2)$ 'dir ve yoz düzlemine göre simetriği :

$$M'(-1, 0, 2)$$

oldüğundan, kürenin simetriği : $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ olur.

7.7 Problem : $x = y = z$ doğrusunun, $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ doğrusuna göre simetriği nedir?

Çözüm : Doğru üzerindeki herhangi bir nokta $A(t, t, t)$ 'dir. Simetri noktası $A'(x, y, z)$ olmak üzere,

$$AA' \perp \vec{u} = (1, 2, 3)$$

olması gerektiğinden,

$$(x - t) + 2(y - t) + 3(z - t) = x + 2y + 3z = 6t \quad (*)$$

elde edilir. Diğer yandan, $\frac{A + A'}{2}$ noktası $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ denklemini sağlamalıdır. Yani,

$$\frac{x + t}{2} = \frac{y + t}{4} = \frac{z + t}{6} = k$$

eşitliğinden, (*) gözönüne alınırsa,

$$(2k - t) + 2(4k - t) + 3(6k - t) = 6t$$

olmalıdır. Buradan, $k = \frac{3}{7}t$ bulunur.

$$x = -\frac{1}{7}t, y = \frac{5}{7}t, z = \frac{11}{7}t$$

olacağından, simetri doğrusu

$$t = \frac{x}{-1/7} = \frac{y}{5/7} = \frac{z}{11/7} \text{ veya } x = \frac{y}{-5} = \frac{z}{11}$$

olur.

7.8 Problem : Düzlemde denklemleri $k : y = 2x + 4$ ve $d : y = x$ olan doğrular veriliyor. k doğrusunun d doğrusuna göre simetriği olan doğrunun denklemini bulunuz. (ÖABT İÖ - 2013)

Çözüm : $2x - y + 4 = 0$ ve $x - y = 0$ doğrularına göre,

$$a_1 = 2, b_1 = -1, a_2 = 1 \text{ ve } b_2 = -1$$

olacaktır. O halde,

$$(a_1x + b_1y + c_1) = 2 \frac{(a_1a_2 + b_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} (a_2x + b_2y + c_2)$$

formülü kullanılırsa,

$$(2x - y + 4) = 2 \cdot \frac{2 + 1}{1 + 1} \cdot (x - y) = 3x - 3y$$

eşitliğinden, simetri doğrusu : $-x + 2y + 4 = 0$ elde edilir.

7.9 Problem : $y = x^2$ eğrisinin $y = x + 1$ doğrusuna göre simetriği olan eğrinin denklemini bulunuz.

Çözüm : $y = x^2$ eğrisini, $A(t, t^2)$ parametrik denklemiyle verebiliriz. Simetri eğrisinin parametrik denklemi : $B(a, b)$ olsun.

i) $\overrightarrow{AB} \perp \vec{u} = (1, 1)$ olduğundan, $(a - t) + (b - t^2) = 0$ ise

$$a + b = t + t^2 \quad (*)$$

olur.

ii) $\frac{A+B}{2}$ noktası, doğru üzerinde olduğundan, $\frac{b+t^2}{2} = \frac{a+t}{2} + 1$ eşitliğinden,

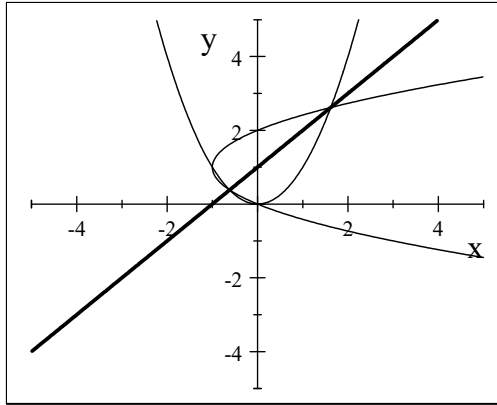
$$b - a = 2 - t^2 + t \quad (**)$$

olur.

Buna göre, (*) ve (**) eşitliklerinden,

$$b = t + 1 \text{ ve } a = t^2 - 1$$

bulunur. $B(t^2 - 1, t + 1)$ eğrisinin kartezyen denklemi, $x = (y - 1)^2 - 1$ elde edilir.



Bölüm Sonu Tekrar Testi (İZDÜŞÜM - SİMETRİ)

1. $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z-1}{2}$ doğrusu üzerindeki hangi nokta, dışındaki $A(1, 1, 1)$ noktasına en yakın noktadır?
A) $\left(\frac{9}{7}, \frac{1}{7}, \frac{9}{7}\right)$ **B)** $\left(\frac{11}{9}, \frac{1}{9}, \frac{11}{9}\right)$ **C)** $\left(\frac{10}{9}, \frac{1}{18}, \frac{10}{9}\right)$
D) $\left(\frac{7}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right)$ **E)** $\left(\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, 3\right)$
2. $x + y + 2z = 5$ düzleminin, $A(1, 1, 1)$ noktasına en yakın olduğu koordinatları bulunuz.
A) $\left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{4}{3}\right)$ **B)** $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{4}{3}\right)$ **C)** $\left(\frac{19}{14}, \frac{19}{14}, \frac{1}{7}\right)$
D) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{6}\right)$ **E)** $(2, 0, 1)$
3. $A(1, 1, 1)$ noktasının $\frac{x}{2} = y = \frac{z}{2}$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.
A) $\left(\frac{11}{9}, \frac{1}{9}, \frac{11}{9}\right)$ **B)** $\left(\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, 3\right)$ **C)** $\left(\frac{7}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right)$
D) $\left(\frac{10}{9}, \frac{1}{18}, \frac{10}{9}\right)$ **E)** $\left(\frac{13}{9}, \frac{6}{9}, \frac{13}{9}\right)$
4. $A(1, 1, 1)$ noktasının $x + 3y + 2z = 5$ düzlemine göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.
A) $\left(\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}\right)$ **B)** $\left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{2}{7}\right)$ **C)** $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{5}{7}\right)$
D) $\left(\frac{7}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right)$ **E)** $\left(\frac{6}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}\right)$
5. Uzayda $A(-2, 3, 3)$ noktasının xy düzlemine göre simetriği B noktası ve B noktasının orjine göre simetriği C noktası olarak belirleniyor. C noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir? (ÖABT İÖ - 2013)
A) $(2, -3, 3)$ **B)** $(-2, -3, 3)$ **C)** $(2, 3, -3)$ **D)** $(-2, -3, -3)$ **E)** $(2, 3, 3)$
6. Uzayda $A(1, 2, 3)$ noktasının, $x = y = z$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatları aşağıdakilerden hangisidir? (ÖABT - 2013)
A) $(3, 2, 1)$ **B)** $(1, 2, 4)$ **C)** $(3, 5, 2)$ **D)** $(2, 4, 3)$ **E)** $(5, 4, 3)$

Örnek 9.53 a) $\alpha(t) = (2 \sec t, 3 \tan t)$ hiperbolünün odağının doğrultmana olan uzaklığını bulunuz.

b) $\alpha(t) = (2 \sin t, 3 \cos t)$ elipsinin odağının doğrultmana olan uzaklığını bulunuz.

c) $\alpha(t) = (1 + 2 \sin t, 2 + \cos t)$ elipsinin odağının doğrultmana uzaklığını bulunuz.

Çözüm : a) Bu hiperbol denklemine göre, $a = 2$ ve $b = 3$ 'tür. Odağın doğrultmana uzaklığı $p = c + \frac{a}{e}$ olduğundan, e ve c 'yi bulalım. $c^2 = a^2 + b^2$ ise $c = \sqrt{13}$ ve

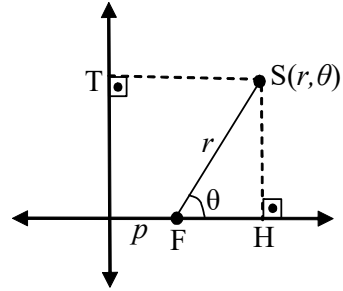
$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ olduğundan, $p = c - \frac{a}{e} = \frac{9\sqrt{13}}{13}$ olarak bulunur.

b) Bu elipste, $a = 2$ ve $b = 3$ 'tür. Asal eksen y eksenidir. $b^2 = a^2 + c^2$ ise, $c = \sqrt{5}$ ve $e = \frac{c}{b}$ 'den $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ olur. O halde, Odağın doğrultmana uzaklığı $p = \frac{b}{e} - c = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ bulunur.

c) Verilen denklem, $\frac{(x-1)^2}{4} + (y-2)^2 = 1$ elipsidir ve $a = 2$ ve $b = 1$ 'dir. $a^2 = b^2 + c^2$ ise, $c = \sqrt{3}$ ve $e = c/a$ 'dan $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olur. O halde, Odağın doğrultmana uzaklığı $p = \frac{a}{e} - c = \frac{\sqrt{3}}{3}$ bulunur.

Koniklerin Kutupsal Denklemi

Şimdi herhangi bir koniğin denklemini, koniğin bir odak noktasını kutup noktası, x eksenini de kutup doğrusu olarak ve doğrultmanına uzaklığını kullanarak kutupsal koordinatlarda ifade edeceğiz. Konik üzerindeki herhangi bir nokta S olsun. S noktasının F odağına uzaklığına r diyelim. θ açısı da, $[SF]$ 'nin x eksenini ile, yani kutup doğrusuyla yaptığı açı olsun. Böylece, F kutup noktası olmak üzere, S noktasının kutupsal koordinatları $S(r, \theta)$



olur. Koniklerde, konik üzerindeki bir noktanın odağa uzaklığının, doğrultmana uzaklığına oranını dış merkezlik olarak adlandırmış, e ile göstermiş ve $e \in (0, 1)$ ise koniğin elips, $e > 1$ ise hiperbol ve $e = 1$ ise parabol olduğunu belirtmiştik. Şimdi

$$\frac{|SF|}{|ST|} = e$$

olduğunu kullanarak konik denklemini ifade edelim. Şekilden takip edilirse,

$$|SF| = r \text{ ve } |ST| = p + r \cos \theta$$

olacaktır.

Buna göre,

$$\frac{|SH|}{|ST|} = e = \frac{r}{p + r \cos \theta}$$

eşitliğinden,

$$r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$$

elde edilir. Bu denklem, e sayısına bağlı olarak elips, hiperbol veya parabol denklemi olacaktır. $e = 1$ alınırsa,

$$r = \frac{p}{1 - \cos \theta}$$

parabol denklemi elde edilir.

Örnek 9.54 $r = \frac{12}{5 - 3 \cos \theta}$ hangi koniğin denklemdir?

b) Bu koniğin odağının doğrultmana uzaklığını bulunuz.

c) Kutupsal koordinatlardaki denklemde kutup, bir odak noktası ise, bu koniğin kartezyen denklemini bulunuz.

Çözüm : Kutupsal koordinatlarda konik denklemini

$$r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta} = \frac{12/5}{1 - (3/5) \cos \theta}$$

ile ifade etmiştik. Buna göre, $e = 3/5 < 1$ olduğundan, verilen denklem bir elips denklemdir.

b) Bu denklemdeki p sayısının odağın doğrultmana uzaklığı olduğunu belirtmiştik, dolayısıyla $ep = 12/5$ eşitliğinden, $p = 4$ bulunur.

c) Kartezyen denklemi bulabilmek için a ve b 'yi belirlemeliyiz. Bunun için,

$$p = \frac{a}{e} - c = \frac{b^2}{c} = \frac{4}{1} = \frac{12}{3} \text{ ve } e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$$

bağıntılarını kullanacağız. $c = 3k$ ve $a = 5k$ yazılırsa, $b^2 = 12k$ olur. $a^2 = b^2 + c^2$ bağıntısından,

$$25k^2 = 9k^2 + 12k$$

olur ve $k = 3/4$ bulunur. O halde,

$$a = \frac{15}{4} \text{ ve } b = 3$$

elde edilir. O halde elipsin kartezyen denklemi

$$\frac{16x^2}{225} + \frac{y^2}{9} = 1$$

elde edilir.

Noktanın Orjin Etrafında Döndürülmesi

Düzlemde verilen bir $P(x, y)$ noktasının, orjin etrafında θ açısı kadar döndürülmesine, P noktasının **dönme hareketi (dönüşümü)** denir. Örneğin, $P(2, 0)$ noktasını, saat yönünün tersine 90° döndürürsek, $P'(0, 2)$ noktası elde edilir. Dönme dönüşümünde, noktanın orjine uzaklığı değişmez. Herhangi bir $P(x, y)$ noktasını orjin etrafında, θ açısı kadar döndüren dönüşümü:

$$R_\theta^n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

ile göstereceğiz. Şimdi, θ ve $P(x, y)$ 'ye bağlı olarak R_θ^n dönüşümünü bulalım.

10.2 ★ Teorem Düzlemde verilen bir $P(x, y)$ noktasını, orjin etrafında θ açısı kadar, saat yönünün tersine döndürüren dönme dönüşümü

$$R_\theta^n(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

ile ifade edilir.

Kanıt. $P(x, y)$, noktasının orjine uzaklığı r ve $\overrightarrow{OP}$ vektörünün x eksenine yaptığı açı α olsun. Bu durumda,

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha$$

yazılabilir. Noktanın döndürüldükten sonraki koordinatları $P'(x', y')$ olmak üzere, $P'(x', y')$ noktasının da orjine uzaklığı r 'dir. $\overrightarrow{OP'}$ vektörünün x eksenine yaptığı açı β ise,

$$x' = r \cos \beta, \quad y' = r \sin \beta$$

yazılabilir. P 'den P' noktasına $\theta = (\beta - \alpha)$ açısı kadar dönme hareketi yapılmıştır. Buna göre, $\beta = \theta + \alpha$ olacaktır.

$$\begin{aligned} x' = r \cos \beta &= r \cos(\theta + \alpha) = (r \cos \alpha) \cos \theta - (r \sin \alpha) \sin \theta \\ &= x \cos \theta - y \sin \theta \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} y' = r \sin \beta &= r \sin(\theta + \alpha) = (r \cos \alpha) \sin \theta + (r \sin \alpha) \cos \theta \\ &= x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

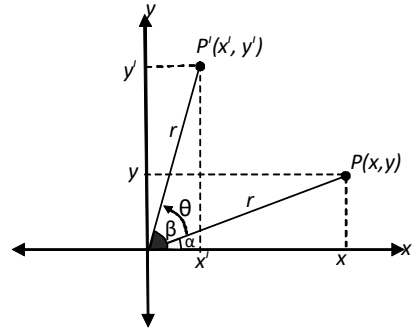
olduğundan,

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

elde edilir. Böylece,

$$R_\theta^n(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

bulunur. ■



Bu eşitliği matrislerle,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= R_{\theta}^n \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

biçiminde yazabiliriz. Buradaki,

$$R_{\theta}^n = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

matrisine noktanın dönmesini gösteren, **dönme matrisi** denir. Bu matris bir ortogonal matristir. Bu matrisin tersi

$$(R_{\theta}^n)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

matrisidir. $(R_{\theta}^n)^{-1}$ matrisi de, $-\theta$ açısı kadar dönmeyi ifade eder. Yani, bu matris düzlemde bir noktayı, orjin etrafında saat yönüne θ açısı kadar döndürür.

Sonuç : Noktanın döndürülmesini ifade eden bir dönme dönüşümünde, dönme yönü belirtilmemişse, saat yönünün tersine dönme işlemi yapılır. Bu durumda, R_{θ}^n dönüşümü,

$$\begin{aligned} R_{\theta}^n(x, y) &= (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) \\ R_{\theta}^n(x, y) &= \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Eğer, dönme saat yönünde olursa,

$$\begin{aligned} R_{-\theta}^n(x, y) &= (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta) \\ R_{-\theta}^n(x, y) &= \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir.

Örnek 10.9 $P(3, \sqrt{3})$ noktası 60° döndürülürse yeni koordinatları ne olur?

Çözüm : Dönme yönü belirtilmediğinden, dönmeyi saat yönünün tersine yapacağız.

$$R_{\theta}^n(3, \sqrt{3}) = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

elde edilir. O halde, dönme sonrasında yeni koordinatlar

$$P'(0, 2\sqrt{3})$$

olur.

Örnek 10.10 $P(1,3)$ noktası 90° saat yönüne döndürülürse, koordinatları ne olur?

Çözüm : Dönme yönü saat yönüne olduğundan,

$$\begin{aligned} R_{-90^\circ}^n(1, 3) &= \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 10.11 $P(2,3)$ noktası $\theta = \arccos \frac{3}{5}$ açısı kadar saat yönüne döndürülürse yeni koordinatları ne olur?

Çözüm : Dönme saat yönünde olduğundan,

$$R_{-\theta}^n(x, y) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

eşitliğini kullanacağız. $\theta = \arccos \frac{3}{5}$ ise $\cos \theta = \frac{3}{5}$ ve $\sin \theta = \frac{4}{5}$ olacağından,

$$R_{-\theta}^n(2, 3) = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

bulunur. O halde, $P'(18/5, 1/5)$ bulunur.

Örnek 10.12 P noktasının 150° döndürüldükten sonraki koordinatları $P'(-4, 2\sqrt{3})$ olduğuna göre, P noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm : Dönme yönü belirtilmediğinden, dönmeyi saat yönünün tersine düşüneceğiz.

Bu kez,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

eşitliğinde, x', y' değerlerini biliyoruz ve x, y değerlerini bulacağız.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos 150^\circ & -\sin 150^\circ \\ \sin 150^\circ & \cos 150^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos 150^\circ & \sin 150^\circ \\ -\sin 150^\circ & \cos 150^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olduğundan, $P(3\sqrt{3}, -1)$ bulunur.

Örnek 10.13 $y = 2x$ doğrusu, saat yönüne 45° döndürülürse denklemi ne olur?

Çözüm : Dönme saat yönüne olduğu için,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

eşitliğini kullanacağız. Bu eşitliğe göre, x ve y 'yi bulalım.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} x' - y' \\ x' + y' \end{bmatrix}$$

olduğundan,

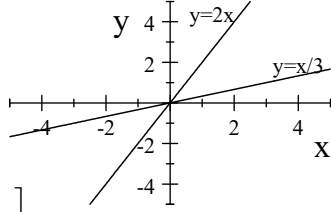
$$y = 2x \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y') = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y')$$

eşitliğinden, $y' = x'/3$ doğrusu elde edilir.

2. Yol : $y = 2x$ doğrusunu parametrik olarak $P(t, 2t)$ şeklinde yazabiliriz. Buna göre,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 2t \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 3t \\ t \end{bmatrix}$$

olduğundan, $x' = \frac{3\sqrt{2}}{2}t$ ve $y' = \frac{\sqrt{2}}{2}t$ eşitliğinden, $y' = \frac{x'}{3}$ bulunur.



10.7) Alıştırma $y = 4x - 3\sqrt{2}$ doğrusu 45° döndürülürse denklemi ne olur?

Yanıt : $3y = 6 - 5x$.

Örnek 10.14 $x^2 - y^2 = 4$ hiperbolü 45° döndürülürse denklemi ne olur?

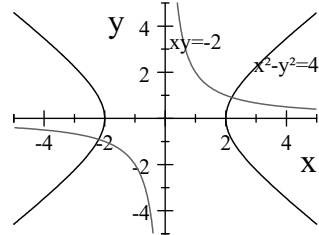
Çözüm : Bir önceki örnekteki gibi, x ve y yerine,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} (x' + y') \\ (-x' + y') \end{bmatrix} \end{aligned}$$

eşitlikliklerini yazacağız. Buna göre,

$$\frac{1}{2} (x' + y')^2 - \frac{1}{2} (-x' + y')^2 = 4$$

denklemi düzenlenirse, $x'y' = 2$ denklemi elde edilir. O halde, $x^2 - y^2 = 4$ hiperbolünün 45° döndürüldükten sonraki denklemi $x'y' = 2$ denklemdir.



Örnek 10.15 $x^2 - 3xy + y^2 = 1/2$ eğrisi 45° döndürülürse denklemi ne olur? Bu hangi koniktir? Bu koniğin döndürülmeden önceki odaklarının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm : x ve y yerine,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} (x' + y') \\ (-x' + y') \end{bmatrix}$$

eşitliklerini yazacağız. Buna göre, yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\frac{1}{2} (x' + y')^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} (x' + y')(-x' + y') + \frac{1}{2} (-x' + y')^2 = \frac{5}{2} (x')^2 - \frac{1}{2} (y')^2 = \frac{1}{2}$$

eşitliğinden,

$$\frac{(x')^2}{1/5} - (y')^2 = 1$$

hiperbolü bulunur. Bu hiperbolün odakları, $x'oy'$ ne göre $c^2 = a^2 + b^2 = 1/5 + 1 = 6/5$ eşitliğinden,

$$F'_1 (\sqrt{6}/\sqrt{5}, 0) \text{ ve } F'_2 (-\sqrt{6}/\sqrt{5}, 0)$$

elde edilir.

Şimdi, odakların gerçek koordinatlarını bulalım.

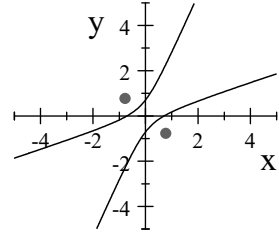
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

eşitliğinde, yerine yazarsak,

$$F_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6}/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{15}/5 \\ -\sqrt{15}/5 \end{bmatrix}$$

ve benzer şekilde, $F_2 (-\sqrt{15}/5, \sqrt{15}/5)$ elde edilir.

$x^2 - 3xy + y^2 = 1/2$ hiperbolünün grafiği ve odakları şekilde gösterilmiştir.



10.8) Alıştırma $P(2\sqrt{3}, 6)$ noktası 30° döndürülürse yeni koordinatları ne olur?

Yanıt : $(0, 4\sqrt{3})$.

10.9) Alıştırma $P(3, 5)$ noktası $\theta = \arcsin \frac{3}{5}$ açısı kadar saat yönüne döndürülürse yeni koordinatları ne olur?

Yanıt : $(27/5, 11/5)$.

10.10) Alıştırma Bir P noktası 120° döndürüldükten sonraki koordinatları $P'(4\sqrt{3}, 6)$ olduğuna göre, P noktasının koordinatlarını bulunuz.

Yanıt : $(\sqrt{3}, -9)$.

10.11) Alıştırma $x^2 + y^2 + xy = 2$ eğrisi 45° döndürülürse denklemi ne olur? Bu hangi koniktir? Bu koniğin döndürülmeden önceki odaklarının koordinatlarını bulunuz.

Yanıt : $\frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{4/3} = 1$, Elips, $F_1(2\sqrt{3}/3, -2\sqrt{3}/3)$ ve $F_1(-2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3)$.

10.12) Alıştırma $xy = 3$ eğrisi 45° döndürülürse denklemi ne olur?

Yanıt : $y^2 - x^2 = 6$.

10.3) ★Teorem Dönme dönüşümü, uzunluğu, açığı ve alanı korur.

Kanıt : $P(x_1, y_1)$ ve $Q(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzunluğu

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

olduğunu biliyoruz. R_θ , θ açısı kadar dönmeyi ifade etmek üzere,

$$P' = R_\theta(P) = ((\cos \theta)x_1 - (\sin \theta)y_1, (\cos \theta)y_1 + (\sin \theta)x_1)$$

$$Q' = R_\theta(Q) = ((\cos \theta)x_2 - (\sin \theta)y_2, (\cos \theta)y_2 + (\sin \theta)x_2)$$

noktaları arasındaki uzaklığı hesaplayalım.

$$|P'Q'| = \sqrt{(\cos \theta(x_2 - x_1) - \sin \theta(y_2 - y_1))^2 + (\cos \theta(y_2 - y_1) + \sin \theta(x_2 - x_1))^2}$$

$$|P'Q'| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|P'Q'| = |PQ|$$

elde edilir. O halde, dönme dönüşümü uzaklığı değiştirmez.

ii) Şimdi de, dönme dönüşümünün açıları değiştirmediğini görelim. $y = m_1x + n_1$ ve $y = m_2x + n_2$ doğrularını göz önüne alalım. Bunlar arasındaki açı,

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$$

bağıntısıyla bulunabilir. Şimdi, bu doğruların θ açısı kadar döndürülmesi durumunda, doğrular arasındaki açıyı bulalım. Doğruların, θ açısı kadar döndürülmesi durumunda

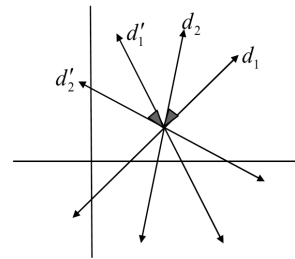
$$(x = (\cos \theta)x' + (\sin \theta)y' \text{ ve } y = (\cos \theta)y' - (\sin \theta)x')$$

dönüşümü yapılarak, doğru denklemleri sırasıyla,

$$y = m_1x + n_1 \text{ ise, } (\cos \theta)y' - (\sin \theta)x' = m_1((\cos \theta)x' + (\sin \theta)y') + n_1;$$

$$y = m_2x + n_2 \text{ ise, } (\cos \theta)y' - (\sin \theta)x' = m_2((\cos \theta)x' + (\sin \theta)y') + n_2$$

olur.



Bu doğruların eğimleri de sırasıyla,

$$\frac{m_1 \cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - m_1 \sin \theta} \text{ ve } \frac{m_2 \cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - m_2 \sin \theta}$$

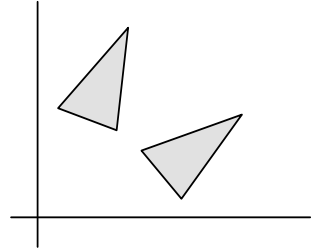
bulunur. Buna göre,

$$\tan \theta = \frac{\frac{m_1 \cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - m_1 \sin \theta} - \frac{m_2 \cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - m_2 \sin \theta}}{1 + \frac{m_1 \cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - m_1 \sin \theta} \frac{m_2 \cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - m_2 \sin \theta}} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

elde edilir. Böylece, dönme dönüşümünün, açığı da değiştirmedeği görülür.

iii) Son olarak, alanın da değişmeyeceğini görelim. P ve Q noktaları ile doğrusal olmayacak şekilde bir $T(x_3, y_3)$ noktası verilsin. Bu durumda P, Q, T ile oluşturulan üçgenin alanı.

$$Alan(PQT) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$



ile bulunur. P, Q, T 'nin θ açısı kadar döndürüldükten sonraki koordinatları, P', Q' ve T' olsun.

$$R_\theta(x'_i, y'_i) = ((\cos \theta) x_i - (\sin \theta) y_i, (\cos \theta) y_i + (\sin \theta) x_i)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} Alan(P'Q'T') &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (\cos \theta) x_1 - (\sin \theta) y_1 & (\cos \theta) y_1 + (\sin \theta) x_1 & 1 \\ (\cos \theta) x_2 - (\sin \theta) y_2 & (\cos \theta) y_2 + (\sin \theta) x_2 & 1 \\ (\cos \theta) x_3 - (\sin \theta) y_3 & (\cos \theta) y_3 + (\sin \theta) x_3 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

eşitliğinde determinant özellikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} Alan(P'Q'T') &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = Alan(PQT) \end{aligned}$$

olduğu görülür. ■

Eksenlerin Orjin Etrafında Döndürülmesi

Şimdi verilen bir koordinat sisteminin, eksenlerinin başlangıç noktası etrafında saat yönünün tersine θ açısı kadar döndürülmesi durumunda, eski ve yeni koordinat sisteminde bir noktanın koordinatları arasındaki bağıntıları bulacağız. xoy dik koordinat sistemi verilsin. Bu koordinat sisteminin, saat yönünün tersine, başlangıç noktası etrafında θ açısı kadar eksenleri döndürülmesiyle elde edilen koordinat sistemi $x'oy'$ olsun. Bu durumda, herhangi bir noktanın koordinatları nasıl değişir, ya da bir eğrinin denklemi yeni koordinat sisteminde nasıl ifade edilir. Bu kısımda bunların yanıtlarını arayacağız.

10.4 ★ Teorem xoy dik koordinat sisteminde bir $P(x_1, y_1)$ noktası verilsin. Eksenlerin başlangıç noktası etrafında θ açısı kadar, saat yönünün tersine döndürülmesi durumunda, $P(x_1, y_1)$ noktasının, yeni koordinat sistemindeki koordinatlarını veren dönme dönüşümü,

$$R_\theta(x_1, y_1) = (x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta, -x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta)$$

ile ifade edilir.

Kanıt. Bir P noktasının koordinatlarını, xoy sisteminde $P(x_1, y_1)$ ile döndürülerek elde edilen $x'oy'$ koordinat sisteminde ise $P(x'_1, y'_1)$ ile gösterelim. Eksenlerin döndürülmesi durumunda P noktasının orjine uzaklığı değişmeyecektir. Bu uzaklığı r ile gösterelim. P noktasının koordinatlarını xoy ve $x'oy'$ sisteminde sırasıyla,

$$x_1 = r \cos(\alpha + \theta) \text{ ve } y_1 = r \sin(\alpha + \theta),$$

$$x'_1 = r \cos \alpha \text{ ve } y'_1 = r \sin \alpha$$

ile gösterebiliriz. İlk eşitliklerde trigonometrik açılımları kullanırsak,

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta \\ y_1 = r \sin \alpha \cos \theta + r \cos \alpha \sin \theta \end{cases}$$

olur. Burada, ikinci eşitlikler kullanılırsa,

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 \cos \theta - y'_1 \sin \theta \\ y_1 = y'_1 \cos \theta + x'_1 \sin \theta \end{cases} \text{ veya } \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix}$$

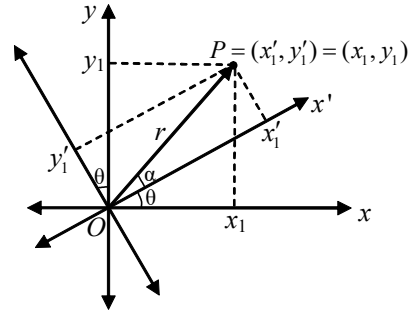
eşitliği elde edilir. Son matris eşitliğinden de,

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Eksen dönüşümü sonrası, noktanın koordinatlarını veren dönme dönüşümü

$$R_\theta(x_1, y_1) = (x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta, -x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta)$$

biçiminde bulunur.



Buna göre, koordinat eksenlerinin θ açısı kadar saat yönünün tersine döndürülmesi durumunda, yeni nokta ile eski noktanın koordinatları arasındaki bağıntıları,

$$\begin{aligned} R_\theta &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ R_\theta(x, y) &= (x', y') = (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta) \\ R_\theta(x, y) &= \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dönme dönüşümü ile elde edebiliriz. Eksen dönmesinin θ açısı kadar saat yönüne doğru yapılması demek, eksenlerin saat yönünün tersine $-\theta$ açısı kadar dönme anlamına gelecektir. Döndürme yönü belirtilmemiş ise, yön saat yönünün tersine anlaşılabacaktır. ■

Eksenlerin döndürülmesi hareketi, noktanın döndürülme işleminin tam tersi bir harekettir. Yani, eksenler θ açısı kadar dönerken, nokta, sanki geriye doğru θ açısı kadar dönüyormuş gibi davranır. Bu tıpkı, hareketsiz bir arabanın içinde bulunan bir kişinin, yan tarafında ileri doğru hareket eden arabayı görünce, geriye doğru hareket ettiğini zannetmesi gibidir. Bu nedenle, noktaya göre dönmeyi ifade eden dönme matrisiyle, koordinat eksenlerinin dönmesini ifade eden dönme matrisi birbirlerinin tersidir.

Örnek 10.16 $P(0, 2)$ noktasının, eksenlerin 60° döndürülmesi durumunda koordinatları ne olur?

Çözüm : Bu noktanın koordinatlarının $(\sqrt{3}, 1)$ olduğu, çizilerek görülebilir. Bunun yanında,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

eşitliğinden de, $R_{60^\circ}(0, 2) = (\sqrt{3}, 1)$ olarak bulunabilir.

Örnek 10.17 $x^2 - y^2 = 4$ hiperbolünün eksenlerin 45° döndürülmesi durumundaki denklemi ne olur?

Çözüm : Denklemden

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos 45^\circ) x' - (\sin 45^\circ) y' \\ (\cos 45^\circ) y' + (\sin 45^\circ) x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}(x' - y')/2 \\ \sqrt{2}(x' + y')/2 \end{bmatrix}$$

yazılırsa,

$$(\sqrt{2}(x' - y')/2)^2 - (\sqrt{2}(x' + y')/2)^2 = 4$$

eşitliğinden, $x'y' = -2$ elde edilir.

Örnek 10.18 *xy dik koordinat sisteminde verilen $P(x, y)$ noktasının, eksenlerin $\theta = \arctan(1/3)$ kadar saat yönünün tersine döndürülmesi durumundaki koordinatları $(2\sqrt{10}, \sqrt{10})$ olduğuna göre, P noktasının koordinatlarını bulunuz.*

Çözüm : $\theta = \arctan 1/3$ ise $\tan \theta = 1/3$, $\sin \theta = 1/\sqrt{10}$ ve $\cos \theta = 3/\sqrt{10}$ olacaktır. Eksen dönmesi söz konusu olduğundan,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\sqrt{10} \\ \sqrt{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

eşitliğini kullanacağız. Buna göre, $P(x, y)$ noktası,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{10} \\ \sqrt{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Örnek 10.19 *$xy = 3$ hiperbolünün eksenlerin 45° döndürülmesi durumundaki denklemi ne olur?*

Çözüm : Denklemden

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos 45^\circ) x' - (\sin 45^\circ) y' \\ (\cos 45^\circ) y' + (\sin 45^\circ) x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}(x' - y')/2 \\ \sqrt{2}(x' + y')/2 \end{bmatrix}$$

yazılırsa, $\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = 3$ eşitliğinden $x'^2 - y'^2 = 6$ bulunur.

10.13) Alıştırma *$P(5, 10)$ noktasının, eksenlerin $\theta = \arccos \frac{3}{5}$ kadar döndürülmesi durumunda, yeni koordinat sisteminde koordinatları ne olur?*

Yanıt : $(11, 2)$.

10.14) Alıştırma *$x^2 + y^2 + xy = 2$ eğrisinin eksenlerin 45° döndürülmesi durumunda, yeni koordinatlara göre denklemi ne olur?*

Yanıt : $3(x')^2 + (y')^2 = 4$.

10.15) Alıştırma *$y = x + 2\sqrt{3}$ doğrusunun eksenlerin 60° döndürülmesi durumunda eğimi ne olur?*

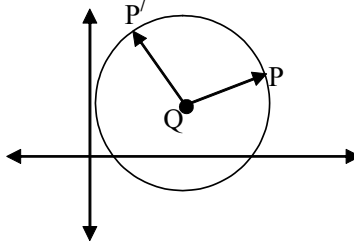
Yanıt : $m = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$.

Bir Noktanın Başka Bir Nokta Etrafında Döndürülmesi

Düzlemde verilen herhangi bir $P(x, y)$ noktasını, bir $Q(x_0, y_0)$ noktası etrafında, θ açısı kadar döndüren dönüşümü:

$$R_{\theta}^Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

ile gösterelim. Şimdi, θ ve $P(x, y)$ 'ye bağlı olarak R_{θ}^Q dönüşümünü bulalım. Dönme, Q noktası etrafında olduğundan, dönme sonucunda elde edilen noktanın Q noktasına uzaklığı değişmez.



Bu dönme hareketinde döndürülen, $\overrightarrow{QP}$ vektörüdür. Bu durumda Q noktası orjin gibi kabul edilir. Fakat, dönme sonucunda elde edilen vektör ise, $\overrightarrow{QP'}$ vektörü olacaktır. Buna göre,

$$\overrightarrow{QP'} = R_{\theta} \cdot \overrightarrow{QP}$$

eşitliği yazılabilir. Yani,

$$\begin{bmatrix} x' - x_0 \\ y' - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

eşitliğinden, döndürülen noktanın koordinatları bulunabilir.

Örnek 10.20 $P(3, 7)$ noktasının, $Q(1, 1)$ noktası etrafında saat yönünün tersine 45° döndürülürse hangi nokta elde edilir?

Çözüm : Dönme noktası $Q(1, 1)$ olduğundan,

$$\begin{bmatrix} x' - 1 \\ y' - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 - 1 \\ 7 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

eşitliğinden, $x' = 1 - 2\sqrt{2}$ ve $y' = 1 + 4\sqrt{2}$ olur. Yani, $P'(1 - 2\sqrt{2}, 1 + 4\sqrt{2})$ elde edilir.

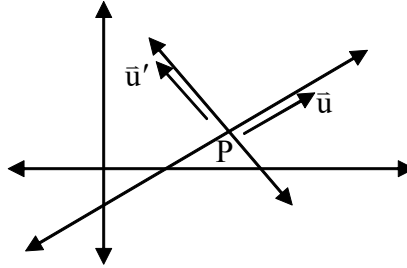
10.16) Alıştırma $A(5, 10)$ noktasının, $B(3, 1)$ noktası etrafında $\theta = \arccos \frac{3}{5}$ kadar döndürülmesi durumunda koordinatları ne olur?

Yanıt : $(-3, 8)$.

Bir Doğrunun, Bir Noktası Etrafında Döndürülmesi

Düzlemde herhangi bir doğrunun, üzerindeki bir P noktası etrafında döndürülmesi durumundaki denklemini bulmak için aşağıdaki adımlar izlenir.

1. Doğrunun $\vec{u}$ doğrultman vektörünün dönme sonucundaki $\vec{u}'$ vektörü bulunur. Bu dönme sonucunda elde edilecek olan doğrunun doğrultmanı olacaktır. Yani, dönme hareketinin, doğrultmanı nasıl değiştirdiği önemlidir.
2. Doğrunun üzerinde bulunan ve etrafında döndüğü P noktası sabit olduğundan, dönme sonucunda elde edilen doğru da P noktasından geçecektir. Bu nokta doğrunun çivilendiği nokta gibi düşünülebilir.
3. P noktası ve $\vec{u}$ doğrultmanı bilinen doğru denklemi kolayca elde edilir.



Örnek 10.21 $3y + x = 4$ doğrusu, $P(1, 1)$ noktası etrafında, $\arctan 2$ açısı kadar saat yönünün tersine döndürülürse, denklemi ne olur?

Çözüm : $\theta = \arctan 2$ ise $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ve $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ tür. Nokta dönmesi söz konusu olduğundan,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dönüşümü kullanılmalıdır. $3y + x = 4$ doğrusunun doğrultmanı $\vec{u} = (3, -1)$ olduğundan, doğrunun döndürüldükten sonraki doğrultmanı

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

eşitliğinden, $\vec{u}' = (1, 1)$ alınabilir. O halde, döndürülen doğru $P(1, 1)$ noktasından geçeceğinden,

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1}$$

eşitliğinden, $y = x$ elde edilir.

Afin Dönüşüm

Tanım A tersinir bir kare matris olmak üzere, $f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$ formundaki dönüşümlere **Afin dönüşüm** denir. Düzlemde bir afin dönüşüm, $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ tersinir bir matris ve $\vec{b} = (b_1, b_2)$ olmak üzere, $\vec{x} = (x_1, x_2)$ için,

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. $f(\vec{x}) = \vec{y}$ ise, A^{-1} tanımlı olduğundan

$$A\vec{x} + \vec{b} = \vec{y} \Rightarrow A\vec{x} = \vec{y} - \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}(\vec{y} - \vec{b})$$

eşitliğinden, $\vec{y}$ vektörü verilmiş ise, $\vec{x}$ vektörü de bulunabilir. Yani, f^{-1} de tanımlıdır ve bir afin dönüşümün tersi de bir afin dönüşümdür. Öteleme ve dönme dönüşümleri birer özel afin dönüşümlerdir. Gerçekten,

$$T_u(\vec{x}) = I\vec{x} + \vec{u}$$

öteleme dönüşümünde, $A = I$ birim matrisi tersinir bir matristir ve $\vec{b} = \vec{u}$ öteleme vektörüdür. $R_\theta(\vec{x}) = R\vec{x}$ dönme dönüşümünde,

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

matrisi tersinir bir matristir ve dönme dönüşümü de bir afin dönüşümdür.

10.5 ★ Teorem *Afin dönüşümlerin bileşkesi de afin dönüşümdür.*

Kanıt : $f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{a}$ ve $g(\vec{x}) = B\vec{x} + \vec{b}$ iki afin dönüşüm olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\vec{x}) &= g(f(\vec{x})) \\ &= B(A\vec{x} + \vec{a}) + \vec{b} \\ &= (BA)\vec{x} + (B\vec{a} + \vec{b}) \end{aligned}$$

olacaktır. A ve B matrisleri tersinir olduğundan, BA matrisi de tersinirdir. O halde, $g \circ f$ dönüşümü de bir afin dönüşümdür. ■

★ Afin dönüşümler, **genel olarak uzaklığı korumazlar**. Fakat, aşağıdaki teoremden ifade ettiğimiz gibi, **doğru parçaların uzunlukları arasındaki oranı korurlar**.

10.6 ★ Teorem $f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$ bir afin dönüşüm olsun. f dönüşümü,

- doğruları doğrulara götürür.*
- paralel doğruları paralel doğrulara götürür.*
- İki paralel doğru parçası arasındaki oranı korur.*

10.3 Problem : $A(10, 5)$ noktası, θ açısı kadar saat yönünün tersine döndürülürse $B(5, 10)$ noktası elde ediliyor. Buna göre $\tan \theta$ değeri kaçtır?

Çözüm : Nokta dönmesi için,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

eşitliğini kullanacağız.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \cos \theta - 5 \sin \theta \\ 5 \cos \theta + 10 \sin \theta \end{bmatrix}$$

olmalıdır. Buradan,

$$\begin{aligned} 10 \cos \theta - 5 \sin \theta &= 5 \\ 5 \cos \theta + 10 \sin \theta &= 10 \end{aligned}$$

eşitliklerinden, $\cos \theta = \frac{4}{5}$ ve $\sin \theta = \frac{3}{5}$ olur. $\tan \theta = \frac{3}{4}$ olur.

10.4 Problem : Düzlemde $A(1, 1)$ ve $P(3, 4)$ noktaları veriliyor. $\overrightarrow{AP}$ vektörü, A noktasının etrafında saat yönünün tersine 90° döndürülürse $\overrightarrow{AN}$ vektörü elde ediliyor. Buna göre N noktasının koordinatlarının toplamı kaçtır? (ÖABT 2014)

Çözüm : $N(a, b)$ olsun. $\overrightarrow{AN} = R_\theta(\overrightarrow{AP})$ eşitliğinden,

$$\begin{bmatrix} a - 1 \\ b - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 - 1 \\ 4 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

olur. Buna göre, $a = -2$ ve $b = 3$ olur. $N = (-2, 3)$ bulunur.

10.5 Problem : xoy dik koordinat sistemi $T(x, y) = (x', y') = (x - 1, y - 1)$ dönüşümü altında ötelenerek $x'oy'$ koordinat sistemi elde ediliyor. xoy dik koordinat sisteminde denklemi $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$ olan eğrinin $x'oy'$ koordinat sistemindeki denklemi nedir? (ÖABT - 2014)

Çözüm : $x = x' + 1$ ve $y = y' + 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} (x' + 1)^2 + (y' + 1)^2 - 2(x' + 1) - 2(y' + 1) - 1 &= 0 \\ (x')^2 + (y')^2 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

10.6 Problem : $y = 2x - 1$ doğrusu 45° döndürülürse denklemi ne olur?

Çözüm : Dönme açısı, saat yönünün tersine olduğundan,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Fakat, bize x ve y değerleri gereklidir. O halde,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} (x' + y') \\ (-x' + y') \end{bmatrix}$$

olacağından, $y = 2x - 1$ denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (-x' + y') = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y') - 1$$

eşitliğinden, $y' = -3x' + \sqrt{2}$ doğrusu elde edilir.

10.7 Problem : Düzlemde

$$T(x, y) = (x + 3, y - 2)$$

öteleme fonksiyonu ve O noktası etrafında saat yönünün tersi yönde 45° 'lik $C(x, y)$ döndürme fonksiyonu veriliyor. Buna göre, $A(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ noktasının

$$F = T \circ C$$

bileşke dönüşümü altındaki görüntüsü hangi noktadır? (ÖABT - 2013)

Çözüm : C döndürme fonksiyonu,

$$C = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$C(A) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olur. O halde,

$$\begin{aligned} F &= T \circ C(A) \\ &= T(2, 0) \\ &= (2 + 3, 0 - 2) \\ &= (5, -2) \end{aligned}$$

bulunur.

10.8 Problem : *Dik koordinat düzleminde $y = 3x$ doğrusu, orjin etafında saat yönünün tersine $\pi/4$ radyan döndürüldüğünde elde edilen doğrunun denklemini bulunuz. (ÖABT - 2015)*

Çözüm : $y = 3x$ doğrusunu $P(t, 3t)$ ile ifade edebiliriz. Dönme matrisi

$$R = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$R(A) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}t \\ 2\sqrt{2}t \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan, $y = -2x$ bulunur. .

10.9 Problem : $y = \sqrt{3}x + 1$ doğrusu $A(0, 1)$ noktası etrafında 60° saat yönünde döndürülürse denklemi ne olur?

Çözüm : Doğrunun doğrultmanının dönme sonucunda ne olduğuna bakalım.

$\vec{u} = (1, \sqrt{3})$ 'tür. Buna göre, doğrunun döndükten sonraki doğrultman vektörü :

$$R(\vec{u}) = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan, $A(0, 1)$ noktasından geçen bu doğrunun denklemi :

$$y = 1$$

olur.

Bölüm Sonu Tekrar Testi (KOORDİNAT DÖNÜŞÜMLERİ)

1. $y = 3x - 2$ doğrusu, x ekseninde 3 br ve y ekseninde 2 br ötelenirse eğimi ne olur?
A) 3 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 5 **E)** $\frac{3}{2}$
2. $y = x$ ve $y = 2x + 3$ doğrularının her ikisi de, x ekseninde 3 br ve y ekseninde 2 br ötelenirse aralarındaki açının tanjantı ne olur?
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{4}{5}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{3}{2}$
3. $y = 3x - 2$ doğrusu, x ekseninde 3 br ve y ekseninde 2 br ötelenirse denklemi ne olur?
A) $y = 3x - 2$ **B)** $y = 3x - 5$ **C)** $y = 3x - 4$ **D)** $y = 3x - 9$ **E)** $y = 3x + 6$
4. $y = 3x - 2$ doğrusu, x ekseninde 3 br ve y ekseninde k br ötelendiğinde, denklemi değişmiyorsa, k nedir?
A) -13 **B)** 13 **C)** -11 **D)** 9 **E)** 11
5. Aşağıdakilerden hangisi $3(x - 2)^2 + 4(y - 1)^2 = 12$ elipsinin bir odağıdır?
A) (1, -2) **B)** (-1, 1) **C)** (2, 1) **D)** (-3, 1) **E)** (3, 1)
6. Aşağıdakilerden hangisi $3(x + 1)^2 - (y - 1)^2 = 12$ hiperbolünün bir odağıdır?
A) (1, -2) **B)** (-1, 1) **C)** (2, 1) **D)** (-3, 1) **E)** (3, 1)
7. xoy koordinat sisteminde verilen $y = 2x + 3$ doğrusunun x ekseninin 2 birim, y ekseninin -1 birim ötelenmesiyle elde edilen yeni koordinat sistemindeki denklemini bulunuz.
A) $y = 2x + 5$ **B)** $y = 2x + 3$ **C)** $y = 2x + 8$ **D)** $y = 2x + 1$ **E)** $y = 2x + 6$
8. Aşağıdakilerden hangisi $x^2 + 2x + 2y^2 - 4y - 1 = 0$ koniğinin bir odağıdır.
A) $(1, 1 - \sqrt{2})$ **B)** $(\sqrt{2} - 1, 1)$ **C)** $(\sqrt{2}, 1)$ **D)** $(\sqrt{2} + 1, 1)$ **E)** $(\sqrt{2}, -1)$
9. Hangisi, odakları (3, 4) ve (3, 6) olan ve (5, 5) noktasından geçen elipsin bir doğrultmasının denklemdir?
A) $y = \sqrt{5} + 5$ **B)** $y = 2$ **C)** $y = 9$ **D)** $x = 7$ **E)** $x = 5$

10. $P(2\sqrt{3}, 6)$ noktası 30° döndürülürse hangi nokta elde edilir?
A) $(6, 2\sqrt{3})$ **B)** $(0, 4\sqrt{3})$ **C)** $(\sqrt{3}, 0)$ **D)** $(\sqrt{3} - 1, 1)$ **E)** $(\sqrt{3} + 1, 1)$
11. P noktası saat yönüne 45° döndürülünce $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ noktası elde ediliyor. Buna göre, P noktasının koordinatlarını bulunuz.
A) $(2, \sqrt{2})$ **B)** $(0, 3)$ **C)** $(3, 1)$ **D)** $(3, -1)$ **E)** $(1, 3)$
12. $P(5, 10)$ noktası $\theta = \arcsin \frac{3}{5}$ kadar saat yönüne döndürülürse, koordinatları ne olur?
A) $(10, 5)$ **B)** $(0, 3)$ **C)** $(-2, 11)$ **D)** $(11, 2)$ **E)** $(-5, 10)$
13. $y = 3x$ doğrusu, saat yönünün tersine 45° döndürülürse denklemi ne olur?
A) $y = -2x$ **B)** $y = -3x$ **C)** $y = \frac{x}{2}$ **D)** $y = \frac{-x}{3}$ **E)** $y = 3x$
14. $x^2 + yx + y^2 - 2 = 0$ eğrisi 45° döndürülürse denklemi ne olur?
A) $3x^2 + y^2 = 4$ **B)** $x^2 - 3y^2 = 4$ **C)** $x^2 + 3y^2 = 4$
D) $3x^2 - y^2 = 4$ **E)** $xy = 2$
15. $x^2 + xy + y^2 = 1$ eğrisinin, eksenlerin 45° döndürülmesi durumunda, yeni eksenlere göre denklemi ne olur?
A) $3x^2 + y^2 = 2$ **B)** $x^2 - 3y^2 = 2$ **C)** $x^2 + 3y^2 = 2$
D) $3x^2 - y^2 = 2$ **E)** $xy = 2$
16. $P(2\sqrt{3}, 4)$ noktasının, eksenlerin 60° döndürülmesi durumundaki koordinatları nedir?
A) $(-5, -\sqrt{3})$ **B)** $(5, -\sqrt{3})$ **C)** $(\sqrt{3}, -5)$ **D)** $(-1, 3\sqrt{3})$ **E)** $(3\sqrt{3}, 1)$
17. $y = \sqrt{3}x + 2$ doğrusunun, eksenlerin 60° saat yönüne döndürülmesi durumunda eğimi ne olur?
A) 0 **B)** -1 **C)** $\sqrt{3}$ **D)** $-\sqrt{3}$ **E)** $2\sqrt{3}$

YANTITLAR : Kitapta

EĞRİ VE YÜZEY DENKLEMLERİ

Bu bölümde, geometride en sık karşılaşılan bazı temel eğrileri ve yüzeyleri tanımlayarak, bunların denklemlerini inceleyeceğiz.

Eğrilerin ve Yüzeylerin Denklemleri

Eğriler ve yüzeyler karşımıza genelde iki formda çıkar. Birincisi, aşına olduğumuz kartezyen denklemleri ile, diğeri de parametreye bağlı parametrik denklemleriyle. Çoğu zaman, parametrik denklemlerle işlem yapmak daha kolaydır.

Eğrilerin ve Yüzeylerin Kartezyen Denklemleri

Tanım Eğrilerin ve yüzeylerin koordinat fonksiyonlarına bağlı olarak yazılmış denklemlerine **kartezyen denklemleri** denir.

Örneğin,

$\mathbb{R}^2$ uzayında $y = x^2$ parabolü,

$\mathbb{R}^3$ uzayında $z = x^2 + y^2$ paraboloidi gibi.

Tanım $F(x, y) = 0$ eşitliğini sağlayan (x, y) noktalarının geometrik yerine $\mathbb{R}^2$ **uzayında bir eğri** denir.

Örneğin,

$F(x, y) = y - x^2 = 0$ eğrisi, düzlemdeki parabol eğrisidir.

$F(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$, $\mathbb{R}^2$ uzayında bir çemberi,

$F(x, y) = y - 2x - 3 = 0$ denklemi de, $\mathbb{R}^2$ uzayında bir doğruyu ifade eder.

Tanım $F(x, y, z) = 0$ eşitliğini sağlayan (x, y, z) noktalarının geometrik yerine de, $\mathbb{R}^3$ **uzayında bir yüzey** denir.

Örneğin, $Ax + By + Cz + D = 0$ ile verilen düzlem,

$$F(x, y, z) = Ax + By + Cz + D = 0$$

eşitliğini sağlayan (x, y, z) noktalarının oluşturduğu düz bir yüzeydir.

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$$

eşitliğini sağlayan (x, y, z) noktalarının oluşturduğu yüzey ise 2 yarıçaplı küre yüzeyidir.

$F(x, y, z) = 0$ denklemi, bazen

$$y = f(x, z), z = f(x, y) \text{ veya } x = f(y, z)$$

formunda yazılabilir.

★ Verilen bir kartezyen denklemin hangi uzayda tanımlandığı çok önemlidir.

Örneğin,

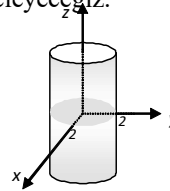
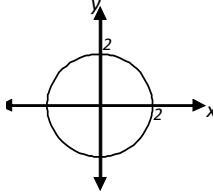
$$x^2 + y^2 = 4$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denklem, $\mathbb{R}^2$ uzayında sadece x ve y 'ye bağlı olduğundan bir **çember** belirtirken, aynı denklem, $\mathbb{R}^3$ uzayında, x, y, z 'ye bağlı olduğundan ve z belirsiz olduğundan bir **silindirik yüzeyi** belirtir. Yani,

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0 \text{ yazılışı çemberi,}$$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4 \text{ yazılışı ise silindiri gösterir.}$$

Silindirik yüzeyini, ilerleyen kısımlarda daha detaylı inceleyeceğiz.



$x^2 + y^2 = 4$ denklemi, $\mathbb{R}^2$ de çemberi, $\mathbb{R}^3$ de silindiri gösterir

$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4$ denkleminde, z değeri belirtilirse, bu durumda $\mathbb{R}^3$ uzayında bir eğri elde edilir.

Örneğin, $\mathbb{R}^3$ uzayında, xoy düzlemindeki 2 yarıçaplı bir çember denklemini,

$$x^2 + y^2 = 4, z = 0$$

ile, yani $F(x, y, 0) = x^2 + y^2 - 4$ ile verebiliriz. Benzer düşünceyle,

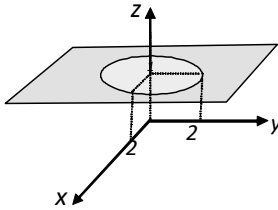
$$x^2 + y^2 = 4, z = 1$$

denklemini, $z = 1$ düzlemindeki 2 yarıçaplı çemberi ifade eder.

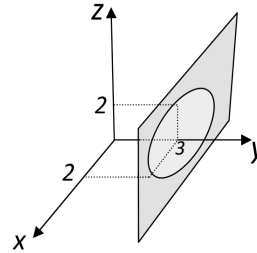
$\mathbb{R}^3$ uzayında sadece

$$x^2 + y^2 = 4$$

yazılırsa, yani z değeri belirtilmeyerek bir değişken olarak bırakılırsa, bu denklem çembersel dik silindiri gösterecektir.



$z=1$ düzleminde $x^2 + y^2 = 4$ çemberi



$y=3$ düzleminde $x^2 + z^2 = 4$ çemberi

Eğrilerin ve Yüzeylerin Parametrik Denklemleri

Eğriler ve yüzeylerin parametrik gösterimleri arasındaki en önemli fark, eğrileri sadece 1 parametre ile gösterebilirken, yüzeyleri 2 parametre ile göstermemizdir. Bir yüzey asla tek parametre ile gösterilemez. Eğrileri genelde α, β gibi harflerle gösterirken, parametre olarak da genelde t veya s seçilir. Yüzeyleri ise, φ ile gösterip, parametre olarak da genel olarak u, v seçeceğiz.

Eğriler Tek Parametreye Bağlı Olarak Gösterilebilir.

Örneğin,

$$\alpha(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$$

eğrisi $\mathbb{R}^2$ uzayındaki birim çemberdir ve bu çember t parametresiyle gösterilmiştir.

$$\beta(t) = (2 \cos t, 3, 2 \sin t)$$

eğrisi, $\mathbb{R}^3$ uzayında $y = 3$ düzlemindeki 2 yarıçaplı çemberi ifade eder.

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3, 3t^2 + 3)$$

eşitliği de, $\mathbb{R}^4$ uzayında bir eğri belirtir. Tek parametre olduğundan, eğri olduğunu bilebiliriz.

Yüzeyler İki Parametreye Bağlı Olarak Gösterilebilir.

Örneğin,

$$\varphi(u, v) = (u, v, 2u - 3v + 4)$$

ile verilen parametrik denklem bir yüzey belirtir.

$$x = u, y = v \text{ ve } z = 2x - y + 4$$

eşitliğinden, bu yüzeyin normali $\vec{N} = (2, -1, -1)$ olan $2x - y - z = -4$ düzlemini gösterdiği görülebilir.

$$\varphi(u, v) = (2 \sin u, 2 \cos u, v)$$

ile verilen yüzey ise,

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

ile verilebilen silindir yüzeyidir. $z = xy$ yine bir yüzeydir ve parametrik olarak,

$$\varphi(u, v) = (u, v, uv)$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 12.1 Aşağıda kartezyen denklemleri verilen eğrilerin parametrik denklemlerini yazınız.

a) $\frac{x-1}{2} = y = z + 2$ doğrusu

b) $\mathbb{R}^2$ uzayında $y = x^2 + 1$ parabolü

c) $\mathbb{R}^3$ uzayında $x = 2$ düzleminde verilen $y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ elipsi,

d) $\mathbb{R}^3$ uzayında $z = 1$ düzleminde verilen birim çember,

e) $\mathbb{R}^3$ uzayında $y = 2$ düzleminde verilen $x^2 - \frac{z^2}{4} = 1$ hiperbolü,

f) $\mathbb{R}^3$ uzayında, $x = 2$ düzleminde verilen $y = z^2 + 2$ parabolü.

Çözüm : a) $x = 2t + 1$, $y = t$ ve $z = t - 2$ olduğundan, $\alpha(t) = (2t + 1, t, t - 2)$ yazılabilir.

b) $x = t$ denilirse, $\alpha(t) = (t, t^2 + 1)$ olur.

c) $\alpha(t) = (2, \sin t, 2 \cos t)$.

d) $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 1)$.

e) $\alpha(t) = (\sec t, 2, 2 \tan t)$,

f) $\alpha(t) = (2, t^2 + 2, t)$.

Örnek 12.2 Aşağıda parametrik denklemleri verilmiş eğrilerin, kartezyen denklemlerini bularak hangi eğriler olduklarını yazınız.

a) $\alpha(t) = (t, 2t - 1)$

b) $\alpha(t) = (3t - 2, 2t, 4t - 1)$

c) $\alpha(t) = (3 \cos t, 3 \sin t)$

d) $\alpha(t) = (3 \cos t, 4 \sin t)$

e) $\alpha(t) = (2, 3 \cos t, 3 \sin t)$

f) $\alpha(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 1)$

g) $\alpha(t) = (3 \cos t, 1, 2 \sin t)$

h) $\alpha(t) = (3 \tan t, 2 \sec t, 1)$

Çözüm : a) $x = t$, $y = 2t - 1$ olduğundan, $\mathbb{R}^2$ de $y = 2x - 1$ doğrusu.

b) $\mathbb{R}^3$ uzayında $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{4}$ doğrusu.

c) $\mathbb{R}^2$ de $x^2 + y^2 = 9$ çemberi.

d) $x = 3 \cos t$, $y = 4 \sin t$ olduğundan, $\mathbb{R}^2$ uzayında, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ elipsi.

e) $x = 2$ düzleminde, $y^2 + z^2 = 9$ çemberi.

f) $z = 1$ düzleminde, $x^2 + y^2 = 9$ çemberi.

g) $y = 1$ düzleminde, $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ elipsi.

h) $z = 1$ düzleminde, $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$ hiperbolü.

Kürenin Parametrik Denklemi

Küre üzerindeki bir P noktasının koordinatlarını uygun açılara u ve v diyerek bulalım. Açıları şekildeki gibi seçersek,

$$z = (R \sin u)$$

$$y = (R \cos u) (\sin v)$$

$$x = (R \cos u) (\cos v)$$

yazılabilir. Buna göre, kürenin parametrik denklemini,

$$\varphi(u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$$

olarak verebiliriz.

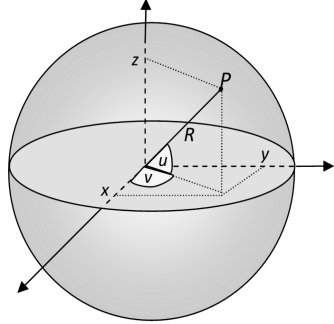
Benzer şekilde, u ve v açılarını uygun yerlerde seçerek, küreyi parametrik olarak,

$$\varphi(u, v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u),$$

$$\varphi(u, v) = (R \cos u \sin v, R \cos u \cos v, R \sin u),$$

$$\varphi(u, v) = (R \sin u, R \cos u \cos v, R \cos u \sin v),$$

ve bunlara benzer şekilde vermek mümkündür.



Örnek 12.10 Aşağıdaki küre denklemlerini parametrik olarak yazınız.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

b) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$.

Çözüm : a) $\varphi(u, v) = (3 \cos u \cos v, 3 \cos u \sin v, 3 \sin u)$

b) $\varphi(u, v) = (1 + 2 \cos u \cos v, 2 + 2 \cos u \sin v, 3 + 2 \sin u)$.

12.9) Alıştırma Aşağıdakilerden hangileri

$$(x - 1)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 4$$

küresinin bir parametrik gösterimi değildir.

A) $\varphi(u, v) = (2 \sin u \cos v, 2 \sin u \sin v, 2 \cos u)$

B) $\varphi(u, v) = (1 + 2 \sin u \cos v, 2 \sin u \sin v, 3 + 2 \cos u)$

C) $\varphi(u, v) = (1 + 2 \sin u \cos v, -2 \cos u \sin v, 3 + 2 \cos u)$

D) $\varphi(u, v) = (1 + 2 \cos u, 2 \sin u \sin v, 3 + 2 \sin u \cos v)$

E) $\varphi(u, v) = (1 + 2 \sin u \sin v, 1 + 2 \sin u \cos v, 3 + 2 \cos u)$

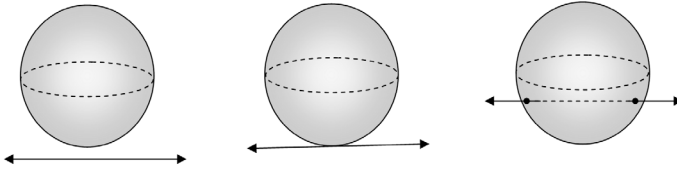
F) $\varphi(u, v) = (1 + 2 \cos u \sin v, -2 \cos u \cos v, 3 + 2 \sin u)$

Yanıt : A), C) ve E) değildir.

Küre ve Doğru

Bir doğru ile küre ya teğettir, ya iki noktada kesişirler, ya da kesişmezler. Doğru ve küre denklemleri verildiğinde, birbirlerine göre hangi durumda olduğu iki şekilde bulunabilir. Küre ve doğru denklemlerinin ortak çözümünde elde edilen ikinci dereceden denklemin diskriminantı $\Delta > 0$ ise iki noktada kesişirler, $\Delta = 0$ ise teğettirler, $\Delta < 0$ ise kesişmezler. Ya da, kürenin merkezinin doğruya uzaklığı hesaplanır. Bu uzaklığı ℓ ile gösterebiliriz. r yarıçap olmak üzere,

- i) $\ell < r$ ise kesişirler
- ii) $\ell > r$ ise kesişmezler
- iii) $\ell = r$ ise teğettirler.



Bir küre ile bir doğrunun kesişim noktası, doğrunun parametrik değerleri küre denkleminde yazılıp, parametrenin kesişim noktasındaki değeri bulunarak belirlenebilir. M kürenin merkezi ve P 'de küre üzerindeki bir nokta olmak üzere, $\vec{MP}$ vektörüne, kürenin P noktasındaki normal vektörü denir ve $\vec{N}_P$ ile gösterilir. Kürenin herhangi bir P noktasında, küreye teğet olan doğrunun doğrultmanını daima, kürenin P noktasındaki $\vec{N}_P$ normaline diktir.

Örnek 12.11 $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 9$ küresine üzerindeki $P(2, 2, 2)$ noktasında teğet olan bir doğru yazınız.

Çözüm : $\vec{N}_P = P - M = (2, 2, 2) - (1, 0, 0) = (1, 2, 2)$ olduğundan, $\vec{N}_P$ vektörüne dik herhangi bir vektörü doğrultman olarak alabiliriz. Buna göre, $\vec{u} = (4, -1, -1)$ alabiliriz. Bu durumda, istenen şekildeki bir doğrunun denklemi :

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 2}{-1}$$

bulunur. Siz de, başka bir $\vec{u}$ vektörü alarak, başka bir teğet doğru bulunuz.

Örnek 12.12 $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 9$ küresiyle $\frac{x - 1}{2} = \frac{y}{2} = z$ doğrusunun kesişme noktalarını bulunuz.

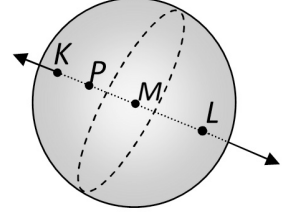
Çözüm : Küre denkleminde, $x = 2t + 1$, $y = 2t$ ve $z = t$ yazalım. Buradan,

$$(2t)^2 + (2t)^2 + t^2 = 9$$

eşitliğinden, $t = \pm 1$ olur. Buna göre kesişme noktaları, $K(3, 2, 1)$ ve $K'(-1, -2, -1)$ bulunur.

Örnek 12.13 $P(1, 2, 3)$ noktası, $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 52$ küresinin içinde bir noktadır. Bu nokta küre üzerindeki hangi noktaya en yakındır?

Çözüm : Kürenin merkezi M olmak üzere, PM doğrusunun, küreyi kestiği noktaların biri P 'ye en yakın, diğeri de en uzak noktadır. Bu noktaları K ve L ile göstereyim. $M(1, 0, 0)$ olduğundan, PM doğrusunun denklemi, $x = 1, \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ olur. Buna göre, bu doğrunun küreyle kesiştiği noktaları bulalım.



$$(1 - 1)^2 + (2t)^2 + (3t)^2 = 52$$

eşitliğinden, $t = \pm 2$ olur. Yani, doğrunun küreyle kesiştiği noktalar $(1, 4, 6)$ ve $(1, -4, -6)$ noktalarıdır. P noktasının bu noktalara uzaklıklarının, sırasıyla

$$\sqrt{(1 - 1)^2 + (4 - 2)^2 + (6 - 3)^2} = \sqrt{13}$$

ve

$$\sqrt{(1 - 1)^2 + (-4 - 2)^2 + (-6 - 3)^2} = 3\sqrt{13}$$

olduğu görülebilir. Yani, küre üzerindeki noktalardan, P noktasına en yakın olan nokta $K(1, 4, 6)$ ve en uzak olan nokta da $L(1, -4, -6)$ noktasıdır.

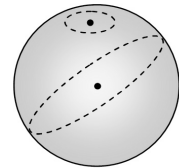
12.10) Alıştırma $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 5$ küresiyle $\frac{x - 1}{2} = \frac{y}{2} = z + 2$ doğrusunun kesişme noktalarını bulunuz.

Yanıt : $K(3, 2, -1)$ ve $K'(5/3, 2/3, -5/3)$.

12.11) Alıştırma $P(2, 2, 3)$ noktası, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = \frac{3}{2}$ küresinin dışında bir noktadır. Bu nokta, küre üzerindeki hangi noktaya en uzaktır?

Yanıt : $(1/2, 1/2, 0)$.

Küre Üzerindeki Çemberler : Küre üzerinde bulunan, çapı, kürenin çapına eşit olan çemberlere **kürenin büyük çemberleri** denir. Bunlar, küre üzerinde elde edilebilecek en büyük çemberlerdir. Çapı, kürenin çapından küçük olan diğer çemberlere de, **kürenin küçük çemberleri** diyeceğiz.



Küre ve Düzlem

Bir düzlem ile bir kürenin birbirine göre durumunu 4 farklı durumda inceleyeceğiz.

1. Düzlem ile küre kesişmez.

Bu durumda, kürenin merkezinin düzleme uzaklığı yarıçaptan büyüktür. Kürenin, düzleme en yakın ve en uzak noktalarının koordinatları, merkezden geçen ve doğrultusu düzlemin normali olan doğrunun küreyle kesişme noktalarıdır.

2. Düzlem küreye teğettir.

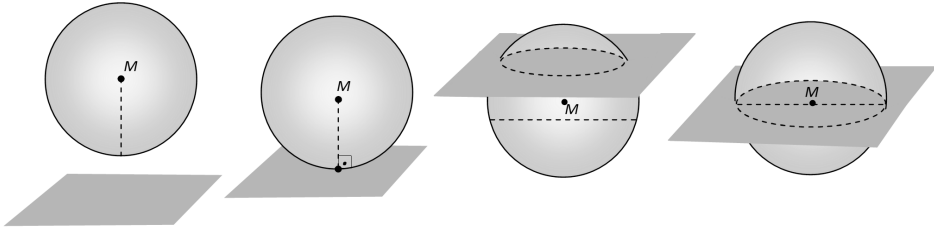
Bu durumda, kürenin merkezinin düzleme uzaklığı yarıçapa eşittir. Ayrıca, küre ile düzlem denklemini ortak çözümünde elde edilecek ikinci dereceden denklemin diskriminantı sıfırdır. Bu ortak çözümden teğet noktası da belirlenebilir.

3. Düzlem küreyi bir küçük çember boyunca keser.

Bu durumda, kürenin merkezinin düzleme uzaklığı yarıçaptan küçüktür. Küçük çemberin hangi düzlemde yer aldığı bulunursa, bulunan düzlem ile kürenin arakesitinden, çember denklemini de bulunabilir.

4. Düzlem küreyi bir büyük çember boyunca keser.

Bu durumda, kürenin merkezinin düzleme uzaklığı sıfırdır. Yani, kürenin merkezi düzlem üzerindedir.



Örnek 12.14 Aşağıdaki düzlemlerin $(x - 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4$ küresi ile durumlarını inceleyiniz.

- a) $x + 2y - 2z + 7 = 0$ b) $x + 2y - 2z + 5 = 0$
 c) $x + 2y - 2z = 0$ d) $x + 2y - 2z - 1 = 0$

Çözüm : Kürenin merkezi $M(3, 0, 1)$ noktasıdır. Kürenin merkezinin düzlemlere uzaklığını,

$$\ell = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

formülünü kullanarak bulalım. $R = 2$ olduğu göz önüne alınırsa,

- a) $\ell = 8/3 > R$ olduğundan, düzlem kürenin dışında,
 b) $\ell = 2 = R$ olduğundan, düzlem kürenin dışında,
 c) $\ell = 1/3 < R$ olduğundan, düzlem ile kürenin kesişimi bir küçük çemberdir,
 d) $\ell = 0$ olduğundan, düzlem ile kürenin kesişimi bir büyük çemberdir.

Örnek 12.15 $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ küresi ile, $2x + y - 2z = d$ düzlemi veriliyor.

a) Küre ve düzlem birbirlerine teğet ise $d = ?$

b) Küre ile düzlemin kesişimi bir büyük çember ise $d = ?$

c) $d = 5$ için, küre üzerindeki, düzleme en yakın ve en uzak olan noktaların koordinatlarını bulunuz.

Çözüm : a) Kürenin merkezi $M(1, 1, 1)$ noktasıdır. Merkezin düzleme uzaklığı :

$$\ell = \frac{|2 + 1 - 2 - d|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|1 - d|}{3}$$

olduğundan, küre ve düzlem birbirine teğet ise, $\ell = r = 1$ olması gerektiğinden, $|1 - d| = 3 \Rightarrow d = 4$ veya $d = -2$ elde edilir.

b) Küre ile düzlemin kesişiminin bir büyük çember olması için, $\ell = 0$ olmalıdır. Buradan, $d = 1$ bulunur.

c) $d = 5$ alınırsa, $\ell = 4/3 > 1$ olduğundan, düzlem küreyi kesmez. Önce, kürenin merkezinden geçen ve düzleme dik olan doğrunun denklemini bulalım. $\vec{u} = \vec{N} = (2, 1, -2)$ olduğundan, doğrunun denklemi :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2} = t$$

olur. Bu doğru ile kürenin kesişim noktalarını bulalım. Küre denkleminde,

$$x = 2t + 1, y = t + 1 \text{ ve } z = -2t + 1$$

yazarsak,

$$(2t + 1 - 1)^2 + (t + 1 - 1)^2 + (-2t + 1 - 1)^2 = 1$$

$$9t^2 = 1$$

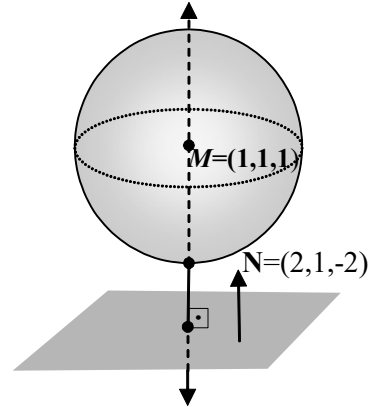
eşitliğinden, $t = \pm 1/3$ olur. Kesişim noktalarını K_1, K_2 ve bu noktaların düzleme uzaklıklarını da, ℓ_1, ℓ_2 ile gösterirsek,

$$t = 1/3 \text{ için, } K_1 \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right) \text{ ve } \ell_1 = \frac{|10/3 + 4/3 - 2/3 - 5|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{1}{3}$$

ve

$$t = -1/3 \text{ için, } K_2 \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3} \right) \text{ ve } \ell_2 = \frac{|2/3 + 2/3 - 10/3 - 5|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{7}{3}$$

olur. $\ell_1 < \ell_2$ olduğundan, K_2 kürenin düzleme en uzak noktası, K_1 ise kürenin düzleme en yakın noktasıdır.



12.12) Alıştırma $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 1$ küresi ile, $2x + y - 2z = d$ düzlemi veriliyor.

- a) Küre ve düzlem birbirlerine teğet ise $d = ?$
 b) Küre ile düzlemin kesişimi bir büyük çember ise $d = ?$
 c) $d = 8$ için, küre üzerindeki, düzleme en yakın ve en uzak olan noktaların koordinatlarını bulunuz.

Yanıt : a) $\{-1, 5\}$ b) 2 c) $(5/3, 7/3, 1/3)$ en yakın ve $(1/3, 5/3, 5/3)$ en uzak nokta.

Örnek 12.16 $(x-3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$ küresinin üzerinde $A(4, 2, 3)$, $B(0, 0, 1)$ ve $C(2, 2, 3)$ noktaları veriliyor.

- a) Bu noktalardan geçen çember parametrik denklemini bulunuz.
 b) Bu çember büyük çember midir?
 c) Bu çemberin alanını hesaplayınız.

Çözüm : a) Öncelikle, $A(4, 2, 3)$, $B(0, 0, 1)$ ve $C(2, 2, 3)$ noktalarının bulunduğu düzlemin denklemini bulalım.

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 4 & 2 & 3-1 \\ 2 & 2 & 3-1 \end{vmatrix} = 4z - 4y - 4 = 0$$

eşitliğinden, düzlem denklemini $y = z - 1$ elde edilir. düzlem denklemiyle, kürenin arakesiti bize istenen çemberin denklemini verir. Buna göre,

$$(x-3)^2 + (z-1)^2 + (z-1)^2 = 9 \Rightarrow (x-3)^2 + 2(z-1)^2 = 9, y = z - 1$$

denklemini istenen çemberin denklemdir. (Burada, $\mathbb{R}^3$ uzayında döndürülmüş ve ötelenmiş bir çember elde ettiğimiz için, standart düzlemsel çember denklemini çıkması beklenmez.) Şimdi, bu çemberin parametrik denklemini bulalım.

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(z-1)^2}{9/2} = 1, y = z - 1$$

olduğundan, bu çemberin parametrik denklemini

$$\begin{aligned} x &= 3 + 3 \cos t \\ z &= 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin t \\ y &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin t \end{aligned}$$

olacaktır.

b) Bulunan çemberin büyük çember olup olmadığını kontrol etmek için, çemberin üzerinde bulunduğu $y = z - 1$ düzleminin, kürenin merkezinden geçip geçmediğini incelemek yeterlidir. Kürenin merkezi $M(3, 0, 1)$ noktası, düzlem denklemini sağladığından, bulunan çember, büyük çemberdir. Dolayısıyla da yarıçapı kürenin yarıçapıdır.

c) Çember büyük çember olduğundan yarıçapı $R = 3$ ve alanı da 9π olur.

Örnek 12.17 $(x - 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$ küresinin, $x + y + z = 1$ düzlemiyle kesişmesiyle oluşan çemberin alanını bulunuz.

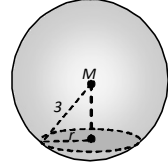
Çözüm : Kürenin merkezinin, düzleme uzaklığı :

$$\ell = \frac{|3 + 0 + 1 - 1|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

olur. Kürenin yarıçapı 3 br olduğundan, düzlemin küreyle kesişmesiyle oluşan çemberin yarıçapı :

$$r = \sqrt{9 - 3} = \sqrt{6}$$

bulunur. O halde, arakesit çemberinin alanı $\pi r^2 = 6\pi$ elde edilir.



Örnek 12.18 $(x - 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$ küresinin $A(4, 2, 3)$, $B(0, 0, 1)$ noktalarından geçen ve alanı 9π olan çemberin parametrik denklemini bulunuz.

Çözüm : Alanı 9π olduğundan, çemberin yarıçapı kürenin yarıçapıdır. O halde, istenen çember büyük çemberdir ve çemberin bulunduğu düzlem kürenin merkezinden geçer. Buna göre, çemberin bulunduğu düzlem

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 4-3 & 2 & 3-1 \\ 0-3 & 0 & 1-1 \end{vmatrix} = 6z - 6y - 6 = 0 \Rightarrow y = z - 1$$

olur. Büyük çemberin denklemini de,

$$\{(x - 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9\} \cap \{y = z - 1\}$$

arakesit eğrisidir.

$$(x - 3)^2 + (z - 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$$

eşitliğinden,

$$\frac{(x - 3)^2}{9} + \frac{(z - 1)^2}{9/2} = 1, y = z - 1$$

bulunur. Bu eğrinin parametrik denklemini ise,

$$x = 3 + 3 \cos t$$

$$z = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin t$$

$$y = \left(1 + \frac{3}{2}\sqrt{2} \sin t\right) - 1 = \frac{3}{2}\sqrt{2} \sin t$$

olduğundan,

$$\alpha(t) = \left(3 + 3 \cos t, 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin t, \frac{3}{2}\sqrt{2} \sin t\right)$$

büyük çemberi elde edilir.

Örnek 12.19 $(x-3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$ küresinin $A(4, 2, 3)$ ve $C(2, 2, 3)$ noktalarından geçen büyük çemberin parametrik denklemini bulunuz. Bu çemberin alanını hesaplayınız.

Çözüm : Bu kez iki nokta verilmiş, fakat, büyük çember istenildiğinden, çemberin bulunduğu düzlem, kürenin merkezinden yani $M(3, 0, 1)$ noktasından da geçmesi gerekir. Kısaca, aslında yine 3 nokta verilmiştir. Buna göre düzlem denklemini :

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 4-3 & 2 & 3-1 \\ 2-3 & 2 & 3-1 \end{vmatrix} = 4z - 4y - 4 = 0$$

eşitliğinden,

$$z = y + 1$$

olur. Buna göre, çemberin denklemini :

$$\{(x-3)^2 + 2y^2 = 9\} \cap \{z = y + 1\}$$

arakesitidir. Parametrik denklemini de,

$$\alpha(t) = \left(3 + 3 \cos t, \frac{3}{2} \sqrt{2} \sin t, 1 + \frac{3}{2} \sqrt{2} \sin t \right)$$

olur. Alanı, büyük çember olduğundan 9π 'dir.

12.13) Alıştırma $(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 5$ küresinin üzerinde $A(2, 1, 3)$, $B(3, 3, 2)$ ve $C(-1, 1, 0)$ noktalarından geçen çemberin alanını hesaplayınız.

Yanıt : 2π .

12.14) Alıştırma $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 9$ küresinin üzerinde $A(2, 0, 3)$, $B(3, 2, 2)$ ve $C(-1, 0, 0)$ noktalarından geçen çemberin alanını hesaplayınız.

Yanıt : $\frac{9}{2}\pi$.

12.15) Alıştırma $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$ küresinin $A(2, 2, 3)$ ve $C(0, 2, 3)$ noktalarından geçen büyük çember denklemini bulunuz. Bu çemberin alanını hesaplayınız.

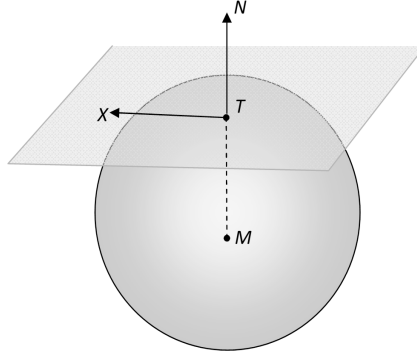
Yanıt : $y = z - 1$, $(x-1)^2 + 2y^2 = 9$, Alan : 9π .

Bir Kürenin Teğet Düzleminin Bulunması

12.1 ★ Teorem $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ küresine, üzerindeki $T(x_0, y_0, z_0)$ noktasında çizilen teğet düzlemin denklemi

$$(x - x_0)(x_0 - a) + (y - y_0)(y_0 - b) + (z - z_0)(z_0 - c) = 0$$

'dır.



Kanıt : Kürenin merkezi M olmak üzere, $\overrightarrow{MT}$ vektörü, düzleme diktir. Buna göre, düzlem üzerindeki değişken bir nokta $X(x, y, z)$ olmak üzere, $\overrightarrow{TX}$ vektörü, $\overrightarrow{MT}$ vektörüne diktir.

$$\overrightarrow{TX} \perp \overrightarrow{MT} \Rightarrow \langle \overrightarrow{TX}, \overrightarrow{MT} \rangle = 0$$

$$\langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0), (x_0 - a, y_0 - b, z_0 - c) \rangle = 0$$

eşitliğinden,

$$(x - x_0)(x_0 - a) + (y - y_0)(y_0 - b) + (z - z_0)(z_0 - c) = 0$$

elde edilir.

Örnek 12.20 $(x - 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$ küresinin üzerindeki $T(4, 2, 3)$ noktasından çizilen teğet düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm : $M(3, 0, 1)$, $T(4, 2, 3)$ ve $X(x, y, z)$ için,

$$\langle \overrightarrow{TX}, \overrightarrow{MT} \rangle = 0$$

eşitliğinden,

$$\langle (x - 4, y - 2, z - 3), (4 - 3, 2 - 0, 3 - 1) \rangle = 0$$

olmalıdır. Buradan $x + 2y + 2z = 14$ elde edilir.

12.16) Alıştırma $(x-3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$ küresinin üzerindeki $T(1, 2, 2)$ noktasından çizilen teğet düzlemin denklemini bulunuz.

Yanıt : $2y - 2x + z - 4 = 0$.

12.2) ★ Teorem $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ küresine, üzerindeki $T(x_0, y_0, z_0)$ noktasında çizilen teğet düzlemin denklemini

$$(x-a)(x_0-a) + (y-b)(y_0-b) + (z-c)(z_0-c) = R^2$$

'dir.

Kanıt : Bir önceki teoremde, teğet düzlemin denklemini

$$(x-x_0)(x_0-a) + (y-y_0)(y_0-b) + (z-z_0)(z_0-c) = 0$$

bulmuştuk. Bu eşitlikle, $(x_0-a)^2 + (y_0-b)^2 + (z_0-c)^2 = R^2$ eşitliğini toplarsak istenen elde edilir.

12.17) Alıştırma $x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$ küresinin üzerindeki $T(x_0, y_0, z_0)$ noktasında çizilen teğet düzlemin denkleminin

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 + \frac{D}{2}(x+x_0) + \frac{E}{2}(y+y_0) + \frac{F}{2}(z+z_0) + G = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 12.21 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + z + 1 = 0$ küresinin $T(1, 1, 0)$ noktasındaki, teğet düzleminin denklemini bulunuz.

Çözüm : $x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$ küresinin üzerindeki $T(x_0, y_0, z_0)$ noktasında çizilen teğet düzlemin denkleminin

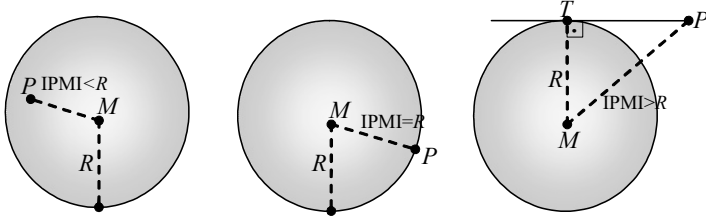
$$xx_0 + yy_0 + zz_0 + \frac{D}{2}(x+x_0) + \frac{E}{2}(y+y_0) + \frac{F}{2}(z+z_0) + G = 0$$

olduğu kullanılırsa,

$$1x + 1y + 0z - (x+1) - \frac{1}{2}(y+1) + \frac{1}{2}(z+0) + 1 = 0$$

eşitliğinden, $y + z = 1$ düzlemi elde edilir.

Bir Noktanın Bir Küreye Göre Kuvveti



Tanım Merkezi M , yarıçapı R olan bir küre ile, uzayda herhangi bir P noktasını göz önüne alalım.

$$K = |PM|^2 - R^2$$

ifadesine, P noktasının verilen küreye göre kuvveti denir.

P noktası kürenin içinde ise $K < 0$;

P noktası kürenin üzerinde ise $K = 0$;

P noktası kürenin dışında ise $K > 0$ olur.

Ayrıca, T , P noktasından küreye çizilen teğetin değme noktası olmak üzere, $|PM|^2 - R^2 = |PT|^2$ 'dir.

12.3 ★ **Teorem** $P(x_1, y_1, z_1)$ noktasının

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

küresine göre kuvveti

$$K = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2 - R^2$$

dir.

Kanıt : $K = |PM|^2 - r^2$ eşitliğinden $K = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2 - R^2$ bulunur. ■

12.4 ★ **Teorem** $P(x_1, y_1, z_1)$ noktasının

$$x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

çemberine göre kuvveti

$$K = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + Fz_1 + G$$

'dir.

Kanıt : Öğrenciye bırakılmıştır.

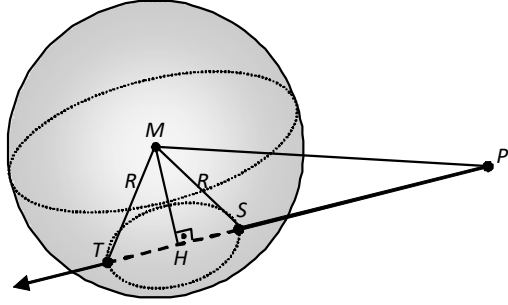
12.5 ★Teorem $P(x_1, y_1, z_1)$ noktasının $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ küresine göre kuvveti K olsun. P noktasından geçen bir doğru bu küreyi S ve T noktalarında kesiyorsa

$$|PS| \cdot |PT| = |K|$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt : P noktası kürenin üzerinde ise kuvvet sıfır olacağından teorem doğrudur. O halde, P noktasının kürenin içinde veya dışında olmasına göre teoremi kanıtlayalım.

i) P noktası kürenin dışında olsun. Merkezden PST doğrusuna indirilen dikmenin, doğruyu kestiği nokta H olsun. Küreden kirişe inilen dikme, kirişi iki eşit parçaya ayıracağından, $|TH| = |HS|$ 'dir. Şimdi, $|PS| \cdot |PT|$ çarpımını hesaplayalım.



$$|PS| = |PH| - |HS| \quad \text{ve} \quad |PT| = |PH| + |HT| = |PH| + |HS|$$

olduğundan, şekilden takip edilirse,

$$\begin{aligned} |PS| \cdot |PT| &= |PH|^2 - |HS|^2 = |PM|^2 - |HM|^2 - |HS|^2 \\ &= |PM|^2 - (|HM|^2 + |HS|^2) \\ &= |PM|^2 - R^2 = K \end{aligned}$$

olduğu görülür.

ii) P noktası çemberin içinde ise kanıt yine benzer şekilde yapılır. ■

Sonuç : (S) bir küre ve P 'de uzayda herhangi bir nokta olsun. P 'den geçen bir doğru küreyi A ve B noktalarında, başka bir doğru da C ve D noktalarında kesiyorsa,

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$

eşitliği sağlanır.

12.18) Alıştırma $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$ küresi veriliyor.

a) $P_1(3, 2, 3)$, $P(0, 2, 2)$ ve $P(1, 3, 1)$ noktalarının küreye göre kuvvetlerini hesaplayınız. Bu noktaların küreye göre bulundukları yerleri belirtiniz.

b) P_1 noktasından geçen $\frac{x-3}{2} = y-2 = z-3$ doğrusunun küreyi kestiği noktalar

A, B ve $x-3 = \frac{y-2}{2} = z-3$ doğrusunun küreyi kestiği noktalar da C, D olsun.

$|P_1A| \cdot |P_1B| = |P_1C| \cdot |P_1D|$ eşitliğinin sağlandığını görünüz.

Çözümlü Problemler

12.1 Problem : $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 5$ küresinin $A(1, 3, 1)$ ve $B(3, 1, 1)$ noktalarından geçen $\sqrt{5}$ yarıçaplı büyük çemberi hangi düzlem üzerinde bulunur?

Çözüm : Büyük çemberin bulunduğu düzlem kürenin merkezinden, yani $M(1, 1, 0)$ noktasından geçer. Buna göre, A, B ve M noktalarından geçen düzlem denkleminde,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 1-1 & 3-1 & 1-0 \\ 3-1 & 1-1 & 1-0 \end{vmatrix} = 2x + 2y - 4z - 4 = 0$$

eşitliğinden, $x + y - 2z = 2$ elde edilir.

12.2 Problem : $x^2 + y^2 + (k + 1)z^2 - 2x - ky + 2z + m = 0$ küresi, $6x - 3y + 2z + 3 = 0$ düzlemine teğet ise m kaçtır?

Çözüm : $k + 1 = 1$ olacağından, $k = 0$ olur. Buna göre, kürenin merkezi :

$$M\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}, \frac{-F}{2}\right) = M(1, 0, -1)$$

ve kürenin yarıçapı da,

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 + F^2 - 4G} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 0 + 4 - 4m}$$

olur. Kürenin merkezinin düzleme uzaklığı yarıçap olduğundan,

$$\ell = \frac{|6 - 0 - 2 + 3|}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = 1 = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 0 + 4 - 4m}$$

eşitliğinden, $m = 1$ bulunur.

12.3 Problem : $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$ küresi ve $x + 2y - 2z = 5$ düzleminin kesişmesiyle oluşan çemberin alanını bulunuz.

Çözüm : Kürenin merkezi $M(1, 0, 1)$ 'in düzleme uzaklığı :

$$\ell = \frac{|1 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 5|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 2$$

olduğundan, arakesit çemberinin yarıçapı : $r^2 + \ell^2 = R^2 = 9$ eşitliğinden, $r^2 = 5$ elde edilir. Bu çemberin alanı ise $\pi r^2 = 5\pi$ olur.

12.4 Problem : *Dayanak eğrisi, $\alpha(t) = (2 \cos t, 1, 3 \sin t)$ olan ve tepe noktası $T(1, 2, 1)$ olan koninin kartezyen denklemini bulunuz.*

Çözüm : $S = \alpha(t)$ ve $P(x, y, z)$ olmak üzere, $\overrightarrow{TP} = \lambda \overrightarrow{TS}$ eşitliğinden,
 $(x - 1, y - 2, z - 1) = \lambda (2 \cos t - 1, -1, 3 \sin t - 1)$

yazılabilir. Buna göre,

$$\lambda = 2 - y, \quad \cos t = \frac{1}{2} \left(\frac{x - 1}{2 - y} + 1 \right) = \frac{1 + x - y}{2(1 - y)}$$

ve

$$\sin t = \frac{1}{3} \left(\frac{z - 1}{2 - y} + 1 \right) = \frac{1 + z - y}{3(1 - y)}$$

eşitliklerinden,

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1 + x - y}{2 - y} \right)^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{1 + z - y}{2 - y} \right)^2 = 1$$

olur ki, düzenlenirse,

$$9(1 + x - y)^2 + 4(1 + z - y)^2 = 36(2 - y)^2$$

elde edilir.

12.5 Problem : $(x - y - 1)^2 + (z - 2y + 3)^2 = (y - 1)^2$ konisinin, dayanak eğrisini ve tepe noktasını bulunuz.

Çözüm : Tepe noktasını bulmak için, kareleri sıfır yapan değerlerle elde edilen denklem sistemini çözmek yeterlidir.

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ z - 2y + 3 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

sisteminden $x = 2, y = 1, z = -1$ olur. O halde, tepe noktası $T(2, 1, -1)$ bulunur. Dayanak eğrisini bulmak için, tepe noktasındaki koordinatlardan farklı olacak şekilde herhangi bir değişkene bir değer verelim. $y = 2$ olsun. Bu durumda,

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

olacağından, $x = 3 + \cos t$ ve $y = 1 + \sin t$ olur. Buna göre, dayanak eğrisi :

$$\alpha(t) = (3 + \cos t, 2, 1 + 2 \sin t)$$

alınabilir.

12.6 Problem : *Dayanak eğrisi, $y = z^2$, $x = 2$ olan ve tepe noktası $T(1, 0, 1)$ olan koninin parametrik ve kartezyen denklemini bulunuz.*

Çözüm : Dayanak eğrisi parametrik olarak $\alpha(t) = (2, t^2, t)$ şeklinde yazılabilir. $P(x, y, z)$ koni üzerinde herhangi bir nokta olmak üzere, $S = \alpha(t)$ olsun. $\overrightarrow{TP} = \lambda \overrightarrow{TS}$ eşitliğinden,

$$(x - 1, y - 0, z - 1) = \lambda (2 - 1, t^2 - 0, t - 1)$$

olmalıdır. Buradan da,

$$\lambda = x - 1, \quad y = \lambda t^2, \quad z - 1 = \lambda (t - 1)$$

elde edilir. Buradan,

$$z - 1 = \lambda (t - 1) \Rightarrow t = \frac{z - 1}{\lambda} + 1 = \frac{z + x - 2}{x - 1}$$

ve

$$y = (x - 1) \left(\frac{z + x - 2}{x - 1} \right)^2$$

eşitliğinden, $y(x - 1) = (z + x - 2)^2$ bulunur.

12.7 Problem : $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4$ küresinin aşağıdaki düzlemlerin kaçıyla kesişimi bir çemberdir?

I) $x - 2y + 2z = 3$ II) $x - 2y + 2z = 1923$ III) $x - 2y + 2z = -1071$

IV) $x - 2y + 2z = 6$ V) $x - 2y + 2z = 0$ VI) $x - 2y + 2z = -5$

Çözüm : Düzlemlerin tamamı $x - 2y + 2z = d$ formundadır. Düzlemin küreyle kesişiminin bir çember olması için, kürenin merkezinin düzlemden ℓ uzaklığı, kürenin R yarıçapından küçük olması gerekir. Buna göre,

$$\ell = \frac{|2 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - d|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{|d|}{3} < 2 \Rightarrow -6 < d < 6$$

bulunur. Yani IV teğettir. Sadece I, V ve VI küreyi keser. Yanıt 2.

12.8 Problem : xoy düzlemine dik izdüşümü, $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ çemberi olan ve $P(1, 2, 4)$ noktasından geçen kürenin, denklemini bulunuz.

Çözüm : Kürenin, xoy düzlemine dik izdüşümü $z = 0$ yazılarak bulunabilir. Buna göre, kürenin denklemi :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + mz + 1 = 0$$

formundadır. Küre, $(1, 2, 4)$ noktasından geçiyorsa, $1 + 4 + 16 - 2 - 8 + 1 = -4m$ eşitliğinden, $m = -3$ olur ve kürenin denklemi $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 3z + 1 = 0$ bulunur.

12.9 Problem : $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$ elipsoidine $T(2, 2, 1)$ noktasında teğet olan düzlemin birim normalini bulunuz.

Çözüm : Teğet düzlemin denklemi

$$2 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot 1 \cdot z = 10$$

eşitliğinden $x + y + z = 5$ elde edilir. Birim normali $N = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ 'dir.

12.10 Problem : Kutupsal veya dik koordinatlarda verilmiş aşağıdaki eğrilerin kaç tanesi çember belirtmez?

I. $r = 2$

II. $r = 2 \cos \theta$

III. $r = \sin 3\theta$

IV. $x^2 + y^2 + 2x = 0$

V. $x^2 + y^2 + 2y + 3 = 0$

VI. $\{x^2 + y^2 + z^2 = 4\} \cap \{x + y + z = 0\}$

Çözüm : I. $r = 2$ çemberdir. $x^2 + y^2 = 4$

II. $r = 2 \cos \theta$ çemberdir. Gerçekten, $r^2 = 2r \cos \theta \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0$ eşitliğinden, $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ çemberi bulunur.

III. $r = \sin 3\theta$, Üç yapraklı gül eğrisidir.

IV. $x^2 + y^2 + 2x = 0$ çemberdir. $(x + 1)^2 + y^2 = 1$.

V. $x^2 + y^2 + 2y + 3 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt{4 - 12}$ tanımsız olduğundan çember değildir.

VI. $\{x^2 + y^2 + z^2 = 4\} \cap \{x + y + z = 0\}$ bir küreyle bir düzlemin arakesitidir. $x + y + z = 0$ düzlemi verilen kürenin merkezinden geçer. O halde arakesit doğrusu bir büyük çemberdir. Yanıt 4.

12.11 Problem : Dayanak eğrisi $\alpha(u) = (\cos u, 2, \sin u)$ ve anadoğrusu

$$x - 1 = y - 2 = z$$

olan silindirin parametrik denklemini bulunuz.

Çözüm : $S = \alpha(u)$ ve $P(x, y, z)$ olmak üzere, $\overrightarrow{SP} = v\vec{u}$ eşitliğinden,

$$(x - \cos u, y - 2, z - \sin u) = v(1, 1, 1)$$

olur ki, buradan,

$$\varphi(u, v) = (v + \cos u, v + 2, v + \sin u)$$

elde edilir.

(12.12) Problem : $(x - 3)^2 + y^2 + z^2 = 9$ küresinin üzerinde $A(3,0,3)$, $B(4,2,2)$, $C(0,0,0)$ noktalarından geçen çemberin, denklemini bulunuz. Alanını hesaplayınız.

Çözüm : Önce, çemberin bulunduğu düzlemin denklemini bulalım.

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-3 \\ 4-3 & 2 & 2-3 \\ 0-3 & 0 & 0-3 \end{vmatrix} = 6y - 6x + 6z = 0$$

eşitliğinden, düzlem denklemi $y = x - z$ elde edilir. Düzlem denklemiyle, kürenin arakesiti bize istenen çemberin denklemini verir. Buna göre,

$$\{(x - 3)^2 + y^2 + z^2 = 9\} \cap \{y = x - z\}$$

denklemi istenen çemberin kartezyen denklemidir.

Kürenin merkezinin, A, B, C noktalarından geçen düzleme uzaklığı :

$$\ell = \frac{|3 - 0 - 0|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

olduğundan, kürenin yarıçapının 3 olduğu gözönüne alınırsa, Pisagor teoreminden arakesit çemberinin yarıçapı

$$\sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$$

bulunur. Böylece, bu çemberin alanı 6π olur.

(12.13) Problem : $(x - 1)^2 = y^2 + (x + z - 2)^2$ konisiyle, $4x - y - z = d$ düzlemi sadece bir noktada kesişiyorsa d kaçtır?

Çözüm : Verilen koniyle bir düzlemin kesişimi sadece bir nokta ise, bu nokta koninin tepe noktasıdır. Buna göre,

$$x - 1 = 0, y = 0 \text{ ve } x + z - 2 = 0$$

eşitliklerinden $T(1, 0, 1)$ olur. Düzlem bu noktayı sağlayacağından, $4 - 0 - 1 = d = 3$ bulunur.

(12.14) Problem : Dayanak eğrisi $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4, z = 3\}$ ve tepe noktası $P(0, 1, -1)$ olan koni yüzeyinin vektörel denklemini bulunuz. (ÖABT - 2014)

Çözüm : Dayanak eğrisini, $\alpha = (2 \cos u, 2 \sin u, 3)$ şeklinde yazabiliriz. $\overrightarrow{PX} = v \overrightarrow{P\alpha}$ vektörel denklemi koninin denklemini verir. Buna göre,

$$(x - 0, y - 1, z + 1) = v(2 \cos u, 2 \sin u - 1, 3 - (-1))$$

eşitliğinden, $T(u, v) = (2v \cos u, 1 + v(2 \sin u - 1), 4v - 1)$ bulunur.

12.15 Problem : $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 2$ küresine $A(1, 1, 1)$ noktasında teğet olan düzlemin denklemini bulunuz. (ÖABT - 2015)

Çözüm : $x1 + y1 + (z - 1)(1 - 1) = x + y = 2$.

12.16 Problem : $\mathbb{R}^3$ uzayında dik koordinat sistemine göre verilen aşağıdaki denklemler için, kaç tanesi doğru eşleştirilmiştir?

I.	$x^2 + y^2 = 4$	Çember
II.	$x^2 + y^2 = 4, z = 1$	Çember
III.	$(x - 1)^2 = y^2 + z^2$	Koni
IV.	$x^2 - y^2 + z^2 = 1$	Çift Kanatlı Hiperboloid
V.	$y = x^2$	Parabolik Silindir
VI.	$y = x^2 + z^2$	Eliptik Paraboloid
VII.	$y = x + 2$	Düzlem
VIII.	$\frac{x - 1}{2} = y, z = 1$	Düzlem

Çözüm : Doğru eşleşme aşağıdaki gibidir. I, IV ve VIII yanlıştır.

I.	$x^2 + y^2 = 4$	<u>Silindir</u>
II.	$x^2 + y^2 = 4, z = 1$	Çember
III.	$(x - 1)^2 = y^2 + z^2$	Koni
IV.	$x^2 - y^2 + z^2 = 1$	<u>Tek Kanatlı Hiperboloid</u>
V.	$y = x^2$	<u>Parabolik Silindir</u>
VI.	$y = x^2 + z^2$	Eliptik Paraboloid
VII.	$y = x + 2$	Düzlem
VIII.	$\frac{x - 1}{2} = y, z = 1$	<u>Doğru</u>

12.17 Problem : $x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 2$ elipsoidiyle, $x - 1 = y = z$ doğrusunun kesişmesiyle oluşan, elipsoid içindeki kirişin uzunluğunu bulunuz.

Çözüm : Elipsoid denkleminde, $x = t + 1, y = t$ ve $z = t$ yazalım.

$$(t + 1)^2 + 4t^2 + 2t^2 - 2 = 7t^2 + 2t - 1 = 0$$

elde edilir. Kesişim noktaları,

$$P_1(t_1 + 1, t_1, t_1) \text{ ve } P_2(t_2 + 1, t_2, t_2)$$

olsun.

$$|P_1 P_2| = \sqrt{3(t_2 - t_1)^2} = \sqrt{3}|t_2 - t_1| = \sqrt{3} \frac{\sqrt{4 - 4 \cdot 7 \cdot (-1)}}{7} = \frac{4\sqrt{6}}{7}$$

elde edilir.

12.18) Problem : z düzleminde bulunan ve denklemi $\{x = 0, z = 3, y = t, t \in \mathbb{R}\}$ olan doğrunun y eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin denklemini bulunuz. (ÖABT - 2013)

Çözüm : Dönme eksenini y olduğundan, dönme sonucunda y koordinatı değişmeyecektir. Dönme sonucunda oluşan çemberin yarıçapı : 3 olduğundan, diğer eksenler,

$$x = 3 \cos v \text{ ve } z = \sin v$$

formunda dönmeye bağlı olarak değişecektir. Buna göre, parametrik denklem :

$$\varphi(u, v) = (3 \cos v, u, 3 \sin v)$$

ve kartezyen denklem : $x^2 + z^2 = 9$ elde edilir.

12.19) Problem : Merkezi orijin olan birim küreye, sırasıyla

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \text{ ve } \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

noktalarında teğet olan düzlemlerin arakesiti bir doğrudur. Bu doğrunun birim doğrultma vektörünü bulunuz. (ÖABT - 2016)

Çözüm : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresine, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ noktasında teğet olan düzlem :

$$\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 1$$

dir ve normal : $\tilde{\mathbf{N}} = (1, 1, 0)$ vektörüdür. $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ noktasında teğet olan düzlem ise,

$$\frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}} = 1$$

düzlemdir ve normal : $\tilde{\mathbf{N}} = (0, 1, 1)$ vektörüdür. Bu iki düzlemin arakesit doğrusu normallere dik olduğundan, arakesit doğrusunun doğrultması :

$$(1, 1, 0) \times (0, 1, 1) = (1, -1, 1)$$

olur. Birim doğrultması ise

$$\pm \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

elde edilir.

Not : Merkezi orijin olan kürenin, $P(a, b, c)$ noktasındaki teğet düzleminin normalinin $\vec{\mathbf{N}} = (a, b, c)$ olduğu kullanılabilir.

(12.20) Problem : $P(1, 1, 1)$ noktasından ve $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - 4z - 1 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + z - 4 = 0$ kürelerinin arakesitinden geçen kürenin merkezini bulunuz.

Çözüm : İki kürenin arakesitinden geçen kürelerin denklemi :

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - 4z - 1) + \lambda (x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + z - 4) = 0$$

formundadır. Küre, $(1, 1, 1)$ noktasından geçtiği gözönüne alınırsa, $\lambda = 5$ bulunur. Buna göre,

$$6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 7x + 9y + z - 21 = 0$$

elde edilir. Bu kürenin merkezi $M(7/12, -3/4, -1/12)$ 'dir.

(12.21) Problem : Aşağıdaki eğrileri parametrik olarak yazınız.

- a) $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ ve $2y = x^2 - 2$ yüzeylerinin arakesiti olan eğri.
b) $x^2 + z^2 = 4$ silindiriyle, $y = z + 1$ düzleminin arakesiti olan eğri.
c) $x^2 + y^2 = 4$ silindiriyle, $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8$ elipsoidinin arakesiti olan eğri.

Çözüm : a) $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ ve $2y = x^2 - 2$ yüzeylerinin arakesitini,

$$(2y + 2) + y^2 + z^2 = 5, x^2 = 2y + 2 \text{ veya } (y + 1)^2 + z^2 = 4, x^2 = 2y + 2$$

şeklinde ifade edebiliriz. Parametrik olarak bu eğriyi :

$$y + 1 = 2 \cos t, z = 2 \sin t \text{ ve } x = \sqrt{2(2 \cos t - 1) + 2} = 2\sqrt{\cos t}$$

yazabiliriz. Yani, $\alpha(t) = (2\sqrt{\cos t}, -1 + 2 \cos t, 2 \sin t)$ bulunur.

b) $x^2 + z^2 = 4$ ve $y = z + 1$ yüzeylerinin arakesiti olan eğriyi parametrik olarak,

$$\alpha(t) = (2 \cos t, 1 + 2 \sin t, 2 \sin t)$$

şeklinde yazabiliriz.

c) Elipsoid denkleminde, $x^2 = 4 - y^2$ yazalım. Buna göre,

$$4 - y^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8 \Rightarrow y^2 + 2z^2 = 4$$

eşitliğinden, $y = 2 \cos t$ ve $z = \sqrt{2} \sin t$ olacaktır. $x^2 + y^2 = 4$ olduğu da gözönüne alınırsa, $x = 2 \sin t$ elde edilir. O halde,

$$\alpha(t) = (2 \sin t, 2 \cos t, \sqrt{2} \sin t)$$

bulunur.

(12.22) Problem : $z = x^2 + 4y^2$ paraboloidi ile, $x^2 + 4y^2 = 4$ silindirin arakesiti olan eğrinin, x eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzeyin denklemini bulunuz. Bu yüzeyin koordinat düzlemlerine dik izdüşüm eğrilerinin denklemlerini bulunuz.

Çözüm : Öncelikle arakesit eğrisini parametrik olarak bulalım. $z = 4$ olduğundan,

$$\alpha(t) = (2 \cos t, \sin t, 4)$$

olacaktır. $z' = z - 4$ ötelemesiyle, bu eğri xy düzleminde bir eğri olacaktır. x eksenini etrafında dönme yapıldığından,

$$x = 2 \cos u \text{ ve } R = \sin u$$

olacağından, $y = \sin u \cos v$ ve $z' = \sin u \sin v$ olur. $z' = z - 4$ olduğundan, yüzeyin parametrik denklemi :

$$\varphi(u, v) = (2 \cos u, \sin u \cos v, 4 + \sin u \sin v),$$

kartezyen denklemi de :

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + (z - 4)^2 = 1$$

elipsoididir. Koordinat düzlemlerine dik izdüşümler ise,

$$xy \text{ düzlemine izdüşüm : } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \alpha(t) = (2 \cos t, \sin t, 0), \text{ elips.}$$

$$xoz \text{ düzlemine izdüşüm : } \frac{x^2}{4} + (z - 4)^2 = 1, \alpha(t) = (2 \cos t, 0, 4 + \sin t), \text{ elips.}$$

$$yoz \text{ düzlemine izdüşüm : } y^2 + (z - 4)^2 = 1, \alpha(t) = (0, \cos t, 4 + \sin t), \text{ çember.}$$

bulunur.

(12.23) Problem : $4x^2 - 8x + y^2 - y - z^2 + 3z = k$ denkleminin hangi yüzeyi belirttiğini k değerlerine göre irdeleyiniz.

Çözüm : Verilen eşitliğin sol tarafındaki terimleri tamkare olacak şekilde gruplayalım. Buna göre,

$$4(x^2 - 2x + 1 - 1) + \left(y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) - \left(z^2 - 3z + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) = k,$$

$$4(x - 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = k + 2$$

olacaktır.

Eğer, $k = -2$ ise, verilen denklem tepe noktası $T\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ olan bir koni belirtir.

Eğer, $k < -2$ ise, verilen denklem iki kanatlı hiperboloiddir.

Eğer, $k > -2$ ise, verilen denklem tek kanatlı hiperboloiddir.

Bölüm Sonu Tekrar Testi (Eğri ve Yüzey Denklemleri)

- Aşağıdakilerden hangisi $y = 1$ düzleminde bir elips eğrisidir?
A) $\alpha(t) = (3 \cos t, 0, 2 \sin t)$ **B)** $\alpha(t) = (\cos t, 0, \sin t)$ **C)** $\alpha(t) = (3 \cos t, 1, \sin t)$
D) $\alpha(t) = (3 \cos t, 2 \sin t, 1)$ **E)** $\alpha(t) = (2 \cos t, 3 \sin t), y = 1$
- $\mathbb{R}^3$ uzayında tanımlanan aşağıdaki denklemlerin hangisi bir eğridir?
A) $\alpha(u, v) = (\cos u, v, \sin u)$ **B)** $z = 1$ **C)** $y = x^2$
D) $\alpha(t) = (3t + 1, 2t, t^2)$ **E)** $z = y^2 + x^2$
- $\mathbb{R}^3$ uzayında tanımlanan aşağıdaki denklemlerin hangisi bir yüzeydir?
A) $\alpha(u) = (\cos u, u, \sin u)$ **B)** $x=2, y=t, z=1$ **C)** $y = x^2, z = 1$
D) $\alpha(t) = (3t + 1, 2t, t^2)$ **E)** $x^2 + y^2 = 1$
- $\mathbb{R}^3$ uzayında tanımlanan aşağıdaki denklemlerin kaç tanesi, bir doğruyu gösterir?
I. $\alpha(t) = (3t + 1, 2t, t^2)$ **II.** $x = 2$ **III.** $\alpha(t) = (3t + 1, 2t, 3t)$ **IV.** $y = 2x$
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4
- Aşağıdaki eşleşmelerden hangileri yanlıştır?
I. $\mathbb{R}^3$ de $x^2 + y^2 = 1 \rightarrow$ BİRİM ÇEMBER,
II. $\mathbb{R}^3$ de $x = 2 \rightarrow$ DÜZLEM
III. $\mathbb{R}^3$ de $\alpha(t) = (3t + 1, 2t, 3t) \rightarrow$ DOĞRU
IV. $\mathbb{R}^3$ de $y = x^2 \rightarrow$ PARABOL
V. $\mathbb{R}^3$ de $y^2 + z^2 = 1, x = 1 \rightarrow$ ÇEMBER
A) I ve IV **B)** I, II ve IV **C)** I ve II **D)** II ve IV **E)** II ve III
- $\mathbb{R}^3$ uzayında verilen aşağıdaki denklemlerin kaç tanesi bir hiperboldür?
I. $x^2 - y^2 = 1$ **II.** $\alpha(t) = (\cosh t, 2, \sinh t)$ **III.** $\alpha(t) = (\sec t, \tan t, 1)$ **IV.** $xy=2, z=1$
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4
- $\mathbb{R}^3$ uzayında verilen, $x^2 + y^2 = 4$ yüzeyinin parametrizasyonu hangisidir?
A) $\alpha(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 0)$ **B)** $\alpha(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 1)$ **C)** $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$
D) $\alpha(s, t) = (2 \cos t, 2 \sin t, s)$ **E)** $\alpha(s, t) = (2s \cos t, 2s \sin t, s)$
- $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6z + 1 = 0$ küresinin merkezi ve yarıçapı için hangisi doğrudur?
A) $M(1, 0, 3), R = 3/2$ **B)** $M(1, 1, 3), R = \sqrt{3}$ **C)** $M(1, 0, 3), R = \sqrt{3}$
D) $M(2, 0, 6), R = 3$ **E)** $M(1, 0, 3), R = 3$

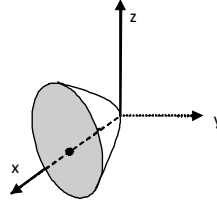
9. $x^2 + (2m - 3)y^2 + (k + 1)z^2 - (k + 2)x - (5 - m)y - z = \frac{k + m}{4}$ küresinin yarıçapı kaçtır?
A) 2 **B)** $\sqrt{3}$ **C)** $\sqrt{2}$ **D)** 3 **E)** 4
10. Aşağıdakilerden hangisi, merkezi, $\alpha(t) = (2t, t, 3t + 1)$ doğrusu üzerinde bulunan ve $A(1, 0, 1)$ noktasından geçen 1 yarıçaplı küredir?
A) $(x + \frac{1}{7})^2 + (y - 1)^2 + (z - \frac{2}{7})^2 = 1$ **B)** $(x - \frac{1}{7})^2 + y^2 + (z + \frac{2}{7})^2 = 1$
C) $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ **D)** $(x + \frac{1}{7})^2 + y^2 + (z - \frac{2}{7})^2 = 1$
E) $x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 1$
11. $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 4)$, $(-4, 1, 0)$, $(-2, -2, 0)$ noktalarından geçen kürenin denklemini bulunuz.
A) $x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 2y - 3z - 3 = 0$ **B)** $x^2 + y^2 + z^2 + 3x - y - 3z - 3 = 0$
C) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - y - 3z - 5 = 0$ **D)** $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - y - 3z - 2 = 0$
E) $x^2 + y^2 + z^2 + 3x - y - 3z - 4 = 0$
12. $\varphi(u, v) = (1 + 2 \cos u, -1 + 2 \sin u \cos v, 2 \sin u \sin v)$ küresinin kartezyen denklemi hangisidir?
A) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4$ **B)** $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$
C) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 4$ **D)** $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 1$
E) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
13. Aşağıdakilerden hangisi $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 4$ küresinin bir parametrik gösterimi değildir?
A) $\varphi(u, v) = (1 + 2 \sin u \sin v, 2 \sin u \cos v, 3 + 2 \cos u)$
B) $\varphi(u, v) = (1 + 2 \sin u \cos v, 2 \sin u \sin v, 3 + 2 \cos u)$
C) $\varphi(u, v) = (1 + 2 \cos u \cos v, -2 \cos u \sin v, 3 + 2 \sin u)$
D) $\varphi(u, v) = (1 + 2 \cos u, 2 \sin u \sin v, 3 + 2 \sin u \cos v)$
E) $\varphi(u, v) = (1 + 2 \sin u \sin v, 1 + 2 \cos u \cos v, 3 + 2 \cos u)$
14. Aşağıdaki düzlemlerin hangisinin $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 4$ küresiyle kesişimi bir büyük çemberdir?
A) $x + y = 0$ **B)** $z = 1$ **C)** $y = x - z$ **D)** $x + y + z = 0$ **E)** $z = 2x + y$
15. Aşağıdaki düzlemlerin hangisinin $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 4$ küresiyle kesişimi bir büyük çember değildir?
A) $x + z = 0$ **B)** $y = 0$ **C)** $y = x + z$ **D)** $x + y + z = 0$ **E)** $z = x + y$

16. $P(2, 2, 3)$ noktası, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = \frac{1}{5}$ küresinin dışında bir noktadır. Bu nokta, küre üzerindeki hangi noktaya en yakındır?
A) $\left(2, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right)$ **B)** $\left(2, \frac{6}{5}, 1\right)$ **C)** $\left(2, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ **D)** $\left(2, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ **E)** $\left(2, \frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$
17. Aşağıdaki düzlemlerin hangisinin $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 4$ küresiyle kesişimi bir küçük çemberdir?
A) $3x + 3y - 3z = -4$ **B)** $y = 1$ **C)** $y = 2x + z$
D) $x + y + z = 1$ **E)** $z = x + y$
18. Aşağıdaki düzlemlerin hangisi $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 9$ küresiyle kesişmez?
A) $x - y + z = 5$ **B)** $x - y + z = 4$ **C)** $x - y + z = 3$
D) $x - y + z = 2$ **E)** $x - y + z = 0$
19. Aşağıdaki düzlemlerin hangisi $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 1$ küresine teğettir?
A) $x - 2y + 2z = 5$ **B)** $x - 2y + 2z = 4$ **C)** $x - 2y + 2z = 3$
D) $x - 2y + 2z = 1$ **E)** $x - 2y + 2z = 0$
20. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 9$ küresi üzerindeki $A(4, 2, 0)$, $B(3, 3, 1)$ ve $C(2, 0, 2)$ noktalarından geçen çemberin alanı kaçtır?
A) $\frac{100}{33}\pi$ **B)** $\frac{99}{32}\pi$ **C)** $\frac{24}{11}\pi$ **D)** $\frac{23}{11}\pi$ **E)** $\frac{26}{11}\pi$
21. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 9$ küresi üzerindeki $A(4, 2, 0)$, $B(3, 3, 1)$ ve C noktalarından geçen çemberin alanı 9π olduğuna göre C noktası hangisi olabilir?
A) $(-1, 3, -1)$ **B)** $(3, 3, -1)$ **C)** $(2, 4, 2)$ **D)** $(2, 0, 2)$ **E)** $(4, 4, 0)$
22. $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 4$ küresinin $x - y + z = d$ düzlemiyle kesiştirilmesiyle oluşan çemberin alanı, 4π olduğuna göre d kaçtır?
A) 2 **B)** 3 **C)** 1 **D)** 4 **E)** -1
23. $(x - 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4$ küresinin $x + y + z = 1$ düzlemiyle kesiştirilmesiyle oluşan çemberin alanı, kaçtır?
A) 2π **B)** 3π **C)** π **D)** 4π **E)** 5π

24. $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$ küresinin $x + y + z = d$ düzlemiyle kesiştirilmesiyle oluşan çemberin alanı 2π ise d kaçtır?
A) 2 **B)** $\sqrt{6} - 2$ **C)** $\sqrt{6}$ **D)** $\sqrt{6} + 2$ **E)** $6 - \sqrt{2}$
25. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 5$ küresinin $P(3, 2, 1)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemi hangisidir?
A) $x + z = 4$ **B)** $y = 2z$ **C)** $x + y + z = 6$ **D)** $y + 2z = 4$ **E)** $2x + z = 7$
26. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$ küresinin $P(3, 3, 1)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemi hangisidir?
A) $2x + y - 2z = 7$ **B)** $y = 3z$ **C)** $x + z = 4$ **D)** $y + 2z = 5$ **E)** $x + y = 4$
27. $P(1, 1, 1)$ noktasının $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$ küresine göre kuvvetini bulunuz.
A) -2 **B)** 3 **C)** -4 **D)** 4 **E)** -1
28. Dayanak eğrisi $\alpha(t) = (\cos t, 2 \sin t, 1)$ olan ve doğrultusu $\vec{u} = (1, 1, 1)$ olan silindirin kartezyen denklemi hangisidir?
A) $x^2 + 4y^2 = 4$ **B)** $(x - z + 1)^2 + 4(y - z + 1)^2 = 4$ **C)** $(x + 1)^2 + 4y^2 = 4$
D) $4(x - z + 1)^2 + (y - z + 1)^2 = 4$ **E)** $4(x - z + 1)^2 + (y - z + 1)^2 = 1$
29. Dayanak eğrisi, $\alpha(t) = (3 \cos t, 1, \sin t)$ olan ve tepe noktası $T(1, 0, 1)$ olan koni hangisidir?
A) $x^2 + 4y^2 = z^2$ **B)** $(x - 1)^2 + 9y^2 = 9(z - 1)^2$ **C)** $(x - 1)^2 + 9z^2 = 9(y - 1)^2$
D) $(x + y - 1)^2 + 9(z + y - 1) = 9y^2$ **E)** $(z + y - 1)^2 + 9(z + x - 2) = 9y^2$
30. $(z + y - 1)^2 + 9(z + x - 2) = 9(y - 1)^2$ konisinin tepe noktası hangisidir?
A) $(-1, 2, 2)$ **B)** $(-2, 1, -1)$ **C)** $(2, 1, 0)$ **D)** $(2, 1, 2)$ **E)** $(4, 1, 0)$
31. Aşağıdakilerden kaç tanesi doğru eşleştirilmiştir?
I. $z = x^2 + \frac{y^2}{4} \rightarrow$ Paraboloid **II.** $z^2 + x^2 = y^2 \rightarrow$ Koni
III. $z^2 + x^2 - y^2 = 1 \rightarrow$ Çift Kanatlı Hiperboloid **IV.** $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4 \rightarrow$ Küre
V. $z^2 + x^2 - y^2 = -1 \rightarrow$ Tek Kanatlı Hiperboloid
A) 5 **B)** 4 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 1

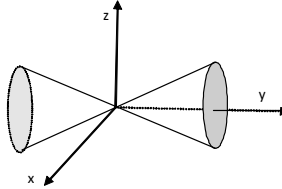
32. Aşağıda grafiği verilen yüzeyin denklemi hangisi olabilir?

- A) $x^2 + 4y^2 = z^2$
- B) $x = y^2 + 9z^2$
- C) $(x - 1)^2 = (y - 1)^2 + z^2$
- D) $x^2 = y^2 + z^2$
- E) $z = x^2 + y^2$



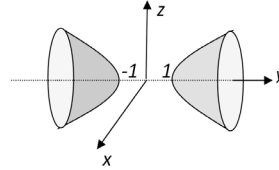
33. Aşağıda grafiği verilen yüzeyin denklemi hangisi olabilir?

- A) $x^2 + 4y^2 = z^2$
- B) $x = y^2 + 9z^2$
- C) $y = x^2 + z^2$
- D) $y^2 = x^2 + z^2$
- E) $z^2 = x^2 + y^2$



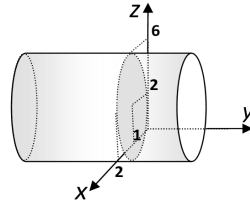
34. Aşağıda grafiği verilen yüzeyin denklemi hangisi olabilir?

- A) $x^2 + 4y^2 = z^2 + 1$
- B) $x + 1 = y^2 + 9z^2$
- C) $y^2 = x^2 + z^2$
- D) $y^2 = x^2 + z^2 + 1$
- E) $z^2 = x^2 + y^2 + 1$



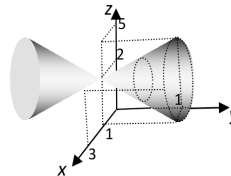
35. Aşağıda grafiği verilen yüzeyin denklemi hangisi olabilir?

- A) $(x - 1)^2 + 2(z - 2)^2 = 1$
- B) $y = x^2 + 9z^2$
- C) $y = x^2 + z^2$
- D) $y = (x - 1)^2 + 4(z - 2)^2$
- E) $16(x - 1)^2 + (z - 2)^2 = 16$



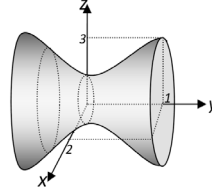
36. Aşağıda grafiği verilen yüzeyin denklemi hangisi olabilir?

- A) $x^2 + 4y^2 = z^2$
- B) $12y^2 = (x - 1)^2 + (z - 2)^2$
- C) $y^2 = 4(x - 1)^2 + 9(z - 2)^2$
- D) $36y^2 = 9(x - 1)^2 + 4(z - 2)^2$
- E) $z^2 = x^2 + y^2$



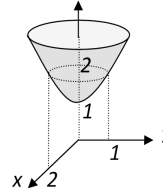
37. Aşağıda grafiği verilen yüzeyin denklemi hangisi olabilir?

- A) $18y^2 + 18 = 9x^2 + 4z^2$
 B) $x = y^2 + 9z^2$
 C) $12z^2 + 12 = 9x^2 + 4y^2$
 D) $y^2 = x^2 + z^2$
 E) $-9x^2 + 4z^2 = 36 + 36y^2$



38. Aşağıda grafiği verilen yüzeyin denklemi hangisi olabilir?

- A) $x^2 + 4y^2 = (z - 1)^2$
 B) $x = y^2 + 9(z - 1)^2$
 C) $y = x^2 + (z - 1)^2$
 D) $z = \frac{x^2}{4} + y^2$
 E) $x^2 + 4y^2 - 4z + 4 = 0$



39. Aşağıdakilerden kaç tanesi doğru eşleştirilmiştir?

- I. $y = x^2 + \frac{z^2}{4} \rightarrow \varphi(u, v) = (v \cos u, v, 2v \sin u)$
 II. $x^2 = y^2 + z^2/4 \rightarrow \varphi(u, v) = (v \cos u, v, 2v \sin u)$
 III. $4y^2 = 4x^2 - z^2 \rightarrow \varphi(u, v) = (\cosh u \cos v, \sinh u \cos v, 2 \sin u)$
 IV. $4y^2 + 4 = 4x^2 + z^2 \rightarrow \varphi(u, v) = (\sin u \cosh v, \sinh v, 2 \cos u \cosh v)$
 V. $4y^2 = 4 + 4x^2 + z^2 \rightarrow \varphi(u, v) = (\cos u \sinh v, \cosh v, 2 \sin u \sinh v)$
 VI. $4(y - 1)^2 = 4(x - 2)^2 + z^2 \rightarrow \varphi(u, v) = (2 - v \cos u, 1 + v, 2v \sin u)$
 A) 5 B) 3 C) 2 D) 4 E) 6

40. $36 = 36(y - 1)^2 + 4(x - 1)^2 - 9z^2$ yüzeyinin parametrik gösterimi aşağıdakilerden hangisinde doğru verilmiştir?

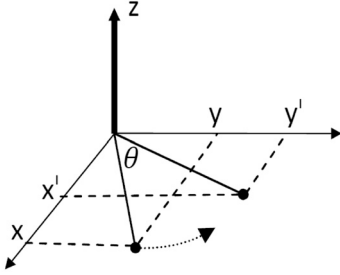
- A) $\varphi(u, v) = (1 + 3 \sinh u \sin v, 2 \sinh u \cos v, 2 \cosh u)$
 B) $\varphi(u, v) = (1 + 3 \cosh u \cos v, 1 + \cosh u \sin v, 2 \sinh u)$
 C) $\varphi(u, v) = (1 + 3 \cos u \cosh v, \cos u \sinh v, 2 \sin u)$
 D) $\varphi(u, v) = (3 \cos u, \sinh u \sin v, 2 \sinh u \cosh v)$
 E) $\varphi(u, v) = (1 + 3 \sinh u \sin v, 1 + \sinh u \cos v, 2 \cosh u)$

41. Aşağıdakilerden kaç tanesi doğru eşleştirilmiştir?

- I. $\varphi(u, v) = (\cos u, 2 \sin u, v) \rightarrow x^2 + y^2/4 = z$
 II. $\varphi(u, v) = (\cos v \cos u, 2 \cos v \sin u, \sin v) \rightarrow 4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$
 III. $\varphi(u, v) = (v \cos u, 2v \sin u, v^2) \rightarrow x^2 + 4y^2 = z$
 IV. $\varphi(u, v) = (v \cosh u, 2v \sinh u, v^2) \rightarrow 4x^2 - y^2 = 4z^2$
 V. $\varphi(u, v) = (2 \cosh u, \sinh u, v) \rightarrow x^2 - 4y^2 = 4$
 A) 5 B) 3 C) 2 D) 4 E) 1

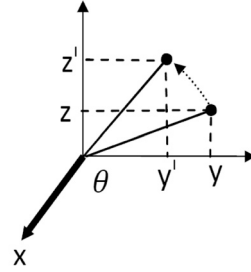
UZAYDA DÖNME DÖNÜŞÜMÜ

Uzaydaki dönme dönüşümü, düzlemdekenden biraz farklıdır. Düzlemde, bir nokta etrafında dönme dönüşümü yapılırken, uzayda **bir eksen etrafında** dönme yapılır. Yani, yapılan dönme bir düzlemde gerçekleşir ve **dönme eksenine ise, bu düzleme dik bir vektörle** ifade edilebilir. O halde, uzaydaki dönme dönüşümünde, dönme eksenine göre dönüşüm değişecektir. Örneğin, z eksen etrafındaki dönme (Şekil1), z eksenine dik olan düzlemde gerçekleşen, yani xoy düzlemindeki bir dönme hareketidir ve dönme matrisi aşağıdaki gibidir. Benzer şekilde, x eksen etrafında ve y eksen etrafındaki dönme dönüşümleri ve matrisler aşağıdaki şekillerde verilmiştir. Fakat, uzayda yapılan bir dönme hareketinde, eksen her zaman x, y, z eksen olmayabilir. Uzaydaki herhangi bir $\vec{n}$ vektörü etrafında da dönme dönüşümünü ifade edebiliriz. Bu kez dönme, $\vec{n}$ vektörüne dik olan düzlemde gerçekleşir. Teorem 13.1'de bu dönme matrisinin nasıl bulunacağı verilmiştir.



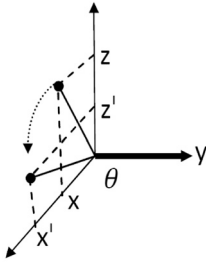
z eksenine göre dönme

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



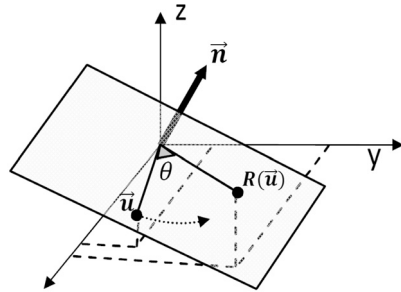
x eksenine göre dönme

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



y eksenine göre dönme

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$



Herhangi bir $\vec{n}$ vektörü etrafında dönme.

Örnek 13.1 $P(4, 1, 2)$ noktası, y eksenini etrafında,

$$\theta = \arcsin \frac{3}{5}$$

açısı kadar döndürülürse, hangi nokta elde edilir?

Çözüm : Dönme yönü belirtilmediyse, dönme yönü olarak saat yönünün tersi alınır. y eksenini etrafındaki dönmeyi,

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

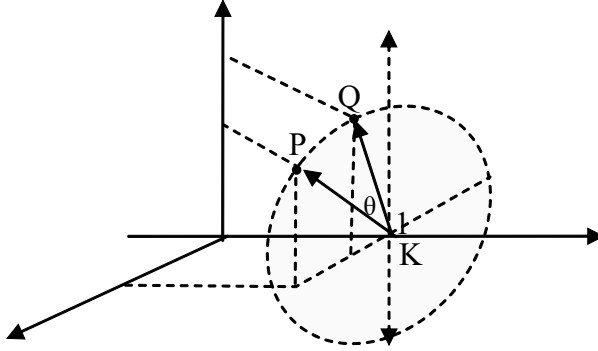
matrisiyle ifade ederiz. Buna göre, $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ve $\cos \theta = \frac{4}{5}$ olduğundan,

$$R_y \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = Q$$

elde edilir. Dönme $y = 1$ düzleminde gerçekleşir. $\overrightarrow{KP}$ ve $\overrightarrow{KQ}$ arasındaki açının

$$\cos \theta = \frac{4}{5}$$

olduğunu, iç çarpımı kullanarak kontrol edebilirsiniz.



13.1) Alıştırma $P(4, 1, 2)$ noktası, x eksenini etrafında, $\theta = \arcsin \frac{3}{5}$ açısı kadar döndürülürse, hangi nokta elde edilir?

Yanıt : $(4, -2/5, 11/5)$.

Örnek 13.2 $\frac{x-1}{2} = y = z$ doğrusu, x eksenine etrafında 90° döndürülürse hangi doğru elde edilir?

Çözüm : Doğruyu, $P(2t+1, t, t)$ şeklinde yazabiliriz. Dönme x eksenine etrafında olduğundan,

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

matrisini kullanacağız. $\theta = 90^\circ$ olduğundan,

$$R_\theta(P) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t+1 \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t+1 \\ -t \\ t \end{bmatrix}$$

elde edilir. Yani, döndürülen doğrunun denklemi :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = z$$

bulunur.

13.2) Alıştırma $\frac{x-1}{2} = y = z$ doğrusu, x eksenine etrafında $\theta = \arcsin \frac{3}{5}$ açısı kadar döndürülürse hangi doğru elde edilir?

Yanıt : $\frac{x-1}{2} = 5y = \frac{5z}{7}$.

Buraya kadar, uzaydaki dönmelerimiz oldukça basit dönmelerdi. Yani, koordinat eksenleri etrafında döndürme dönüşümü uyguladık. Şimdi ise, herhangi bir doğrultu, eksen veya doğru etrafındaki dönmeleri inceleyeceğiz.

13.1) ★ Teorem $\mathbb{R}^3$ uzayında verilen herhangi bir $\vec{u} = (x, y, z)$ vektörünün, herhangi bir $\vec{n} = (a, b, c)$ birim vektörü etrafında θ açısı kadar döndürülmesiyle elde edilen vektör,

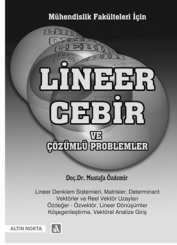
$$\mathbf{R}(\vec{u}) = \langle \vec{u}, \vec{n} \rangle \vec{n} + (\vec{u} - \langle \vec{u}, \vec{n} \rangle \vec{n}) (\cos \theta) + (\vec{n} \times \vec{u}) (\sin \theta)$$

dönüşümü ile bulunur ve bu dönüşümün matrisi

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta + a^2(1 - \cos \theta) & ab(1 - \cos \theta) - c \sin \theta & ac(1 - \cos \theta) + b \sin \theta \\ ab(1 - \cos \theta) + c \sin \theta & \cos \theta + b^2(1 - \cos \theta) & bc(1 - \cos \theta) - a \sin \theta \\ ac(1 - \cos \theta) - b \sin \theta & bc(1 - \cos \theta) + a \sin \theta & \cos \theta + c^2(1 - \cos \theta) \end{bmatrix}$$

şeklinde dir. Ayrıca, dönme açısı θ için, $1 + 2 \cos \theta = \text{iz}R$ eşitliği sağlanır.

Mustafa Özdemir'in Diğer Kitapları



**Lineer Cebir ve
Çözümlü Problemler**



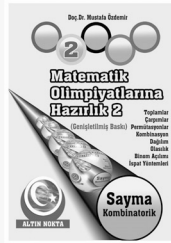
**DAHİMATİK
7. ve 8. Sınıflar İçin
Mat. Yarışma Soruları**



**Ulusal Antalya
Matematik Olimpiyatı
Soruları ve Çözümleri**



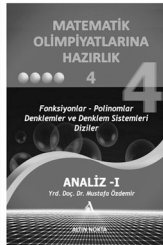
**Matematik Olimpiyatlarına
Hazırlık Cilt 1
Temel Bilgiler**



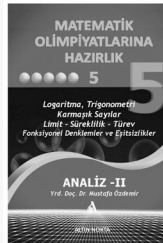
**Matematik Olimpiyatlarına
Hazırlık Cilt 2
Sayma - Kombinatorik**



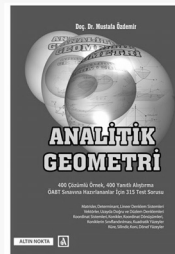
**Matematik Olimpiyatlarına
Hazırlık Cilt 3
Sayılar Teorisi**



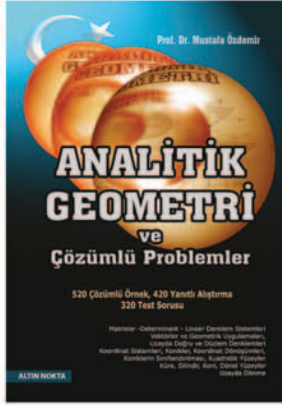
**Matematik Olimpiyatlarına
Hazırlık Cilt 4
Analiz - Cebir 1**



**Matematik Olimpiyatlarına
Hazırlık Cilt 5
Analiz - Cebir 2**



**Analitik
Geometri**



ANALİTİK GEOMETRİ VE ÇÖZÜMLÜ PROBLEMLER

1. Matrisler
2. Determinant
3. Lineer Denklem Sistemleri
4. Vektörler ve Geometrik Uygulamaları
5. Uzayda Doğru Denklemi
6. Uzayda Düzlem Denklemi
7. İzodüğü - Simetri - Yansıma
8. Kutupsal Koordinat Sistemi
9. Konikler (Çember, Elips, Hiperbol, Parabol)
10. Koordinat Dönüşümleri (Öteleme - Dönme)
11. Koniklerin Genel Denklemi
12. Eğri ve Yüzey Denklemleri (Küre, Silindir, Koni, Kuadratik Yüzeyler)
13. Uzayda Dönme Dönüşümü
14. Uzayda Farklı Koordinat Sistemleri
15. (E) n Boyutlu Uzayda Vektörel Çarpım

Kitap hakkında:

Bu kitap üniversitelerimizin Matematik ve Matematik Eğitimi alanındaki lisans programlarında okutulan Analitik Geometri dersi için, yardımcı bir kaynak olması amacıyla hazırlanmıştır.

Analitik Geometri'nin temeli olan ve ihtiyaç duyulan, Matrisler, Determinant ve Vektörler gibi bazı Lineer Cebir konularına da, kitabın başında detaylı olarak yer verilmiştir. Lineer Cebir dersinin, Analitik Geometri dersiyle birlikte verildiği veya daha önce verildiği üniversitelerde bu kısımların bir bölümü atlanabilir. Kitabın anlatımında, her konudaki en önemli noktalar özellikle vurgulanmış, konunun teori kısmı verildikten sonra, her teorem, konu ve önemli noktalar, çeşitli örneklerle zenginleştirilmiştir. Ayrıca, örneklere benzer sorular, örneklerden hemen sonra yanıtlarıyla birlikte alıştırmalar olarak verilerek, konunun pekiştirilmesi amaçlanmıştır.

Her konunun sonuna, çözümlü problemler ile birlikte, konunun tekrar edilmesi amaçlanarak bir test sınavı eklenmiştir. Bu test sınavları, öğrencinin eksikliklerinin farkına varmasını sağlayacak, bunun yanında özellikle (ÖABT) Öğretmenlik Alan Sınavı'na girecek öğretmen adaylarına da faydalı olacaktır.

Bu kitapta, konuların Teorik kısmı verildikten sonra, toplam olarak,

i. 520 Çözümlü Örnek,

ii. 420 Yanıtlı Alıştırma

iii. 320 Yanıtlı Test

bulunmaktadır.

Toplam 1260 soru ile, öğrencinin konuları derinlemesine ve kendi kendine öğrenebilmesi amaçlanmıştır.

ALTIN NOKTA YAYINEVİ

859 Sk. No:1/Z-4 Konak-İZMİR

Tel - Faks: 0 232 441 25 95 Cep: 0 507 470 24 98

kitapana@kitapana.com.tr / altinnokta@altinnokta.com.tr

www.kitapana.com.tr / www.altinnokta.com.tr / www.nokta2000.com

ISBN 978-605-5255-76-3

