Bu ders notlarını hazırlarken

- "Sears ve Zemansky'nin Üniversite Fiziği Cilt I" Yazarlar: Young, Freedman. Yayınevi: Pearson
- "Temel Fizik Cilt I" Yazarlar: Fishbane, Gasiorowicz, Thornton, Yayınevi: Arkadaş.
- "Temel Fizik Cilt I Çözümleri" Yazarlar: Cengiz Yalçın, Ordal Demokan, Yayınevi: Arkadaş.
- "Fiziğin Temelleri Cilt I" Yazarlar: Halliday, Resnick, Yayınevi: Palme.
- "Fiziğin Temelleri Cilt I Çözümleri" Yazarlar: Cengiz Yalçın, Erdoğan Apaydın.

Bu ders notlarını Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi ve Mühendislik Fakültesi öğrencileri için yukarıda sıraladığım kitaplardan derleyerek hazırladım. Bu notlar sadece Eğitim AMAÇLIDIR. BAŞKA AMAÇLAR için ÇOĞALTILMASI YASAKTIR.

Chapter 1

BİRİMLER, VEKTÖRLER VE TEMEL MATEMATİK

[1]

1.1 Birimler

Bir denklem birimsel olarak tutarlı olmalıdır. Elma ile armut toplanamaz.

Örnek 1. *3 saat kaç saniyedir?*

$$3saat = 3saat\left(\frac{60dak}{1saat}\right)\left(\frac{60sn}{1dak}\right) = 10800sn \tag{1.1}$$

Örnek 2. *15 Ekim 1997'de dünya kara sürat rekoru, jet motorlu bir araç ile* $1228\frac{km}{sa}$ *olarak kırılmıştır. Sürati* $\frac{m}{sn}$ *cinsine çeviriniz.*

$$\begin{aligned} 1228\frac{km}{sa} &= 1228\frac{km}{sa}\left(\frac{10^3m}{1km}\right)\left(\frac{1saat}{60dak}\right)\left(\frac{1dak}{60sn}\right) \\ &= \frac{12280}{36}\frac{m}{sn} \\ &= \frac{3070}{9}\frac{m}{sn}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ev ödevi 1. *Dünyanın en büyük işlenmiş elması* Afrikanın birinci yıldızı*'dır. Hacmi* $1,84inch^3$*'tür. Hacmini* m^3 *ve* cm^3 *olarak ayrı ayrı bulunuz.*

1.2 Vektörler

- Tek bir sayı ile tanımlanabilen fiziksel niceliklere *Skaler Nicelikler* denir. **Zaman, sıcaklık, kütle, yoğunluk** bazı örnekleridir.

[1] Bu dersnotları sadece eğitim amaçlıdır. Başka amaçla çoğaltılamaz.

- Tek bir sayı ile tanımlanamayan fiziksel nicelikler de vardır. Bunlara *Vektörel Nicelikler* denir. Bir uçağın süratini ve yönünü belirleyen nicelik bir **hız vektörüdür.** Diğer örnekler **kuvvet, yerdeğiştirme, ivme, açısal ivme, tork, açısal momentum, momentum** vb.

1.2.1 Matematiksel Altyapı

3-boyutlu kartezyen koordinat sistemindeki herhangi bir nokta 3 adet reel sayı ile belirtilir. $(1, 2, -2)$ Bu sayının anlamlı olabilmesi için bir başlangıç noktası kabul edilmelidir. Bu noktayı $(0, 0, 0)$ ile gösteririz ve *Merkez (Orijin)* ismi ile anarız.

En genel olarak bir P_1 noktasını (x_1, y_1, z_1) ile gösterelim. Bir başka P_2 noktasını da (x_2, y_2, z_2) ile gösterelim. P_1 'den P_2'ye çizilen vektör

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \tag{1.3}$$

ile ifade edilebilinir.

1.2.2 Vektörel Özellikler

- Herhangi iki vektörün yönleri aynı ise *vektörler paraleldir.*
- Yönleri aynı olan vektörlerin şiddetleri de aynı ise *vektörler eşittir.*
- Şiddetleri aynı olan vektörlerin yönleri ters ise *vektörler negatif (zıt) vektörlerdir.*
- Şiddetleri farklı olan vektörlerin yönleri ters ise *vektörler anti-paraleldir.*

Bir $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektörün şiddeti (büyüklüğü) $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ile gösterilir ve daima pozitiftir.

1.2.3 Kartezyen Koordinat Sisteminde Vektörler

Dik açılı koordinat sistemine Kartezyen Koordinatlar denir. Herhangi bir $\vec{A}$'ünü farklı vektörlerin toplamı cinsinden

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{A_x} + \overrightarrow{A_y} + \overrightarrow{A_z} \tag{1.4}$$

yazabiliriz. $\overrightarrow{A_x}$, $\overrightarrow{A_y}$ ve $\overrightarrow{A_z}$ vektörlerine **bileşen vektörler** denir. Her bileşen vektörü kartezyen koordinat sisteminde bir eksen boyunca seçebiliriz. Böylelikle o eksen boyunca sadece bir tek sayı ile ifade edilebilen vektörler olurlar.

$$|\overrightarrow{A_x}| = A_x, \tag{1.5}$$
$$|\overrightarrow{A_y}| = A_y, \tag{1.6}$$
$$|\overrightarrow{A_z}| = A_z. \tag{1.7}$$

1.2.4 Kartezyen Koordinat Sisteminde Vektörün Bileşenleri Nasıl Bulunur?

Kolaylık olsun diye 2 boyutlu bir Kartezyen Koordinatlardaki herhangi bir $\vec{A}$'ünün büyüklüğü ve yönü bilindiğini varsayalım. Bileşen Vektörün büyüklükleri şöyle bulunur.

$$|\overrightarrow{A_x}| = |\overrightarrow{A}|\cos\theta, \tag{1.8}$$
$$|\overrightarrow{A_y}| = |\overrightarrow{A}|\sin\theta. \tag{1.9}$$

Buradaki θ açısı Vektörün x-ekseniyle yaptığı açıdır.

Örnek 3. *Dördüncü bölgeye yönelmiş bir vektörün şiddeti* $3m$ *ve* x *ekseniyle yaptığı açı* 45° *ise, vektörü bulunuz.*

$$|\overrightarrow{A_x}| = (3m)\cos(315) = (3m)\cos(45), \tag{1.10}$$
$$|\overrightarrow{A_y}| = (3m)\sin(315) = -(3m)\sin(45). \tag{1.11}$$
$$\vec{A} = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}m, \frac{-3\sqrt{2}}{2}m\right). \tag{1.12}$$

Ev ödevi 2. 3-*boyutlu bir vektör için nasıl genelleme yapılmalıdır. Bulunuz.*

1.2.5 Kartezyen Koordinat Sisteminde Vektörün Bileşenleri Kullanılarak Vektör Nasıl Bulunur?

Kolaylık olsun diye yine 2-boyutta kalalım. Kartezyen Koordinatlardaki herhangi bir $\vec{A}$'ünü bileşen vektörlerini kullanarak şöyle buluruz.

$$|\overrightarrow{A}| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2} \tag{1.13}$$

yön ise

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \tag{1.14}$$

veya

$$\theta = \arctan\frac{A_y}{A_x} \tag{1.15}$$

Burada **dikkat** edilmesi gereken bir nokta vardır. Tanjant fonksiyonunun peryotu 180 derecedir. Dolayısıyla vektörü negatif vektör ile karıştırmamak için bileşenlerine dikkat etmek gerekir.

Ev ödevi 3. 3-*boyutlu bir vektör için nasıl genelleme yapılmalıdır. Bulunuz.*

1.2.6 Birim Vektör

Büyüklüğü 1 olan birimsiz vektöre **Birim Vektör** denir. Uzayda sadece bir yönü tanımlamak için kullanılır. Herhangi bir vektörden ayırmak için üzerine *OK* değil *ŞAPKA* kullanılır.

Kartezyen koordinatlarda x-yönü $\hat{\imath}$, y-yönü $\hat{\jmath}$ ve z-yönü $\hat{k}$ ile belirtilir. Böylece herhangi bir $\vec{A}$'ünü bileşen vektörler cinsinden

$$\overrightarrow{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \tag{1.16}$$

Şeklinde ifade ederiz. Bundan sonraki gösterimlerimizde

$$\overrightarrow{A} \equiv (A_x, A_y, A_z) \equiv A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \tag{1.17}$$

birim vektörleri kullanacağız.

1.2.7 Birim Vektör Nasıl Bulunur?

Herhangi bir vektörden birim vektör elde etmek için, Vektörü şiddetine böleriz.

$$\hat{A} = \frac{\overrightarrow{A}}{|\overrightarrow{A}|}. \tag{1.18}$$

Örnek 4. $\overrightarrow{A} = (5m)\hat{\imath} - (3m)\hat{\jmath} + (2m)\hat{k}$ *vektörünün birim vektörünü bulunuz.*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A} &= (5m)\hat{\imath} - (3m)\hat{\jmath} + (2m)\hat{k} && (1.19)\\
|\overrightarrow{A}| &= \sqrt{(5)^2 + (-3)^2 + (2)^2}m && (1.20)\\
&= \sqrt{38}m && (1.21)\\
\hat{A} &= \frac{5}{\sqrt{38}}\hat{\imath} - \frac{3}{\sqrt{38}}\hat{\jmath} + \frac{2}{\sqrt{38}}\hat{k}. && (1.22)
\end{aligned}$$

Birim vektörün birimsiz kaldığına dikkat ediniz.

1.2.8 Vektörlerle Toplama, Çıkarma ve Çarpma

- Çarpma, toplamanın hızlı yapılışıdır. Bütün bileşenler aynı skaler sayı ile çarpılırsa, Vektörün de aynı skalerle çarpıldığını biliriz. α bir skaler sayı olmak üzere herhangi bir $\vec{A}$'üyle çarpımı yeni bir vektör verir.

$$\begin{aligned}
\alpha\overrightarrow{A} &= \alpha[A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}] && (1.23)\\
&= \alpha A_x\hat{\imath} + \alpha A_y\hat{\jmath} + \alpha A_z\hat{k} && (1.24)\\
&= \overrightarrow{B}. && (1.25)
\end{aligned}$$

- Herhangi iki vektörün toplamı yeni bir vektör verir.

$$\overrightarrow{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}, \tag{1.26}$$
$$\overrightarrow{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}, \tag{1.27}$$
$$\overrightarrow{C} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}. \tag{1.28}$$

- Herhangi iki vektörün çıkarma işlemi, vektörün -1 skaler sayı ile çarpımından sonra toplama işlemi yapılarak gerçekleştirilir. Örnek için $\overrightarrow{C} = 3\overrightarrow{A} - 2\overrightarrow{B}$ olsun, o halde sonuç vektörü

$$\overrightarrow{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}, \tag{1.29}$$
$$\overrightarrow{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}, \tag{1.30}$$
$$\overrightarrow{C} = (3A_x - 2B_x)\hat{i} + (3A_y - 2B_y)\hat{j} + (3A_z - 2B_z)\hat{k}. \tag{1.31}$$

olarak bulunur.

Ev ödevi 4. $\overrightarrow{D} = (6cm)\hat{i} + (3cm)\hat{j} - (1cm)\hat{k}$, $\overrightarrow{E} = (4cm)\hat{i} - (5cm)\hat{j} + (8cm)\hat{k}$ *olsun.* $\overrightarrow{R} = 2\overrightarrow{D} - \overrightarrow{E}$ *olmak üzere* $\hat{R}$*'yi bulunuz.*

1.2.9 Vektörlerin SKALER ve VEKTÖREL ÇARPIMLARI

Bir önceki bölümde vektörlerin skaler sayılarla çarpılmasını gördük. Bu işlemlerden farklı yeni işlemler tanımlanabilir. Bunlardan en önemlileri *SKALER ve VEKTÖREL ÇARPIM*DIR. Bunların *Matematiksel ve Fiziksel Anlamları* Fizik I ve Fizik II dersinin **KİLİT**'idir.

İki vektörün Skaler Çarpımı(Noktasal Çarpım)

İki vektörün skaler çarpımı, bibirlerine olan izdüşümleridir. $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}$ ile gösterilir ve skaler bir değerdir.

- Birim vektörlerin skaler çarpımı: Birim vektörler uzunlukları bir olan birimsiz vektörler olduklarından kendilerine izdüşümleri her zaman kendi boyları yani "1" 'dir. Birbirinden lineer bağımsız birim vektörlerin birbirlerine iz düşümleri sıfır olmaktadır. Bir başka değişle lineer bağımsızlık bir vektörü diğeri cinsinden farklı yazabilmenin ölçütüdür. Buna göre

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1, \tag{1.32}$$
$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0. \tag{1.33}$$

- Genel anlamda herhangi 3 boyutta kartezyan koordinat sisteminde tanımlı iki vektörün skaler çarpımını, $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ herhangi iki vektör olmak üzere

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A} &= A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}, && (1.34)\\
\overrightarrow{B} &= B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}, && (1.35)\\
\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z, && (1.36)\\
&= \sum_{i}^{x,y,z} A_iB_i, && (1.37)\\
&= |\overrightarrow{A}||\overrightarrow{B}|\cos\theta. && (1.38)
\end{aligned}$$

ile tanımlarız. İki vektör arasındaki açı θ'dır. Böylelikle iki vektör arasındaki açıyı bulmak için skaler çarpımı kullanabileceğimizi bulmuş olduk.

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}||\overrightarrow{B}|} \tag{1.39}$$

1. İki vektör birbirine dik ise skaler çarpımları sıfır oluyordu yani birbirlerine izdüşümleri yoktu. $\cos 90 = 0$
2. İki vektör birbirleriyle aynı doğrultuda ise skaler çarpımları maksimum değer verir. $\cos 0 = 1$
3. İki vektör birbirleriyle zıt doğrultuda ise skaler çarpımları minimum değer verir. $\cos 180 = -1$

Örnek 5. $\overrightarrow{A} = 2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}+\hat{k}$ *ve* $\overrightarrow{B} = -4\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-\hat{k}$ *verilmiş olsun. İki vektör arasındaki açı nedir?*

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{[2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}+\hat{k}]\cdot[-4\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-\hat{k}]}{|2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}+\hat{k}||-4\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-\hat{k}|}, && (1.40)\\
&= \frac{(2)(-4)+(3)(2)+(1)(-1)}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{16+4+1}}, && (1.41)\\
&= \frac{-8+6-1}{\sqrt{(14)(21)}}, && (1.42)\\
&= -\frac{\sqrt{6}}{14}. && (1.43)
\end{aligned}$$

$\theta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{14}\right)$ *Sınavda bu sayıyı hesaplamanıza gerek olmayacak ama ben değerinin yaklaşık 100 derece olduğunu söyleyeyim.*

İki vektörün Vektörel Çarpımı(Kros Çarpım)

İki vektör ile bir düzlem oluşturabilirsiniz. Vektörel çarpım bu düzleme dik vektörü bize verir. Bir başka değişle oluşabilecek düzlemin normal

doğrultusundaki vektörü bize verir. $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ ile gösterilir ve vektörel bir değerdir.

- İki vektörle bir düzlem oluşturabilmek için iki vektörün birbirine paralel ve/veya antiparalel olmaması gerekir.
- Bu şartlarda oluşabilecek düzlemin aslında iki adet normal vektörü vardır. Bunlar birbirine zıt vektörlerdir.
- Bir seçim yapıyoruz ve **SAĞEL KURALINA** göre olan NORMAL VEKTÖRÜ veya buna karşılık gelen Vektörel çarpımı kabul ediyoruz.

SAĞ EL KURALI: *Vektörel çarptığımız ilk vektör yönüne sağ elinizin dört parmağını uzatın, ikinci vektör yönüne sağ parmaklarınızı döndürün. BAŞ PARMAĞINIZ size VEKTÖR ÇARPIMI SONUCU ELDE EDİLECEK VEKTÖRÜN YÖNÜNÜ GÖSTERECEKTİR.*

$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ olmak üzere normal vektörünün şiddeti $|\overrightarrow{C}| = |\overrightarrow{A}||\overrightarrow{B}|\sin\theta$ ile bulunur.

1. İki vektör birbirine paralel ve/veya antiparalel ise aralarındaki açı 0 ve/veya 180 derece olur. Dolayısıyla vektörel çarpım bize 0 değerini verir. Bunu az önce bu tip vektörlerin bir düzlem oluşturmadığını dolayısıyla oluşmayan düzlemin normal doğrultusunda bir vektör olamayacağını söylerekek ifade etmiştik.

2. Vektörel çarpım antisimetriktir, yani vektörlerin yazılış yerine göre işaret değiştirir. $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = -\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{A}$.

3. Birim vektörleri kullanırsak sağ el kuralına göre xy-düzlemine dik olan z doğrultusunu nasıl tanımlayacağımızı buluruz.

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} = -(\hat{j} \times \hat{i}), \tag{1.44}$$
$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} = -(\hat{i} \times \hat{k}), \tag{1.45}$$
$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} = -(\hat{k} \times \hat{j}), \tag{1.46}$$
$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0. \tag{1.47}$$

Bu ayrıca bir çevrim kuralı olarak da görülebilinir.

Ev ödevi 5. *En genel olarak iki vektörün vektörel çarpımının* $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}$ *olduğunu ispatlayın.*

Örnek 6. $\overrightarrow{A}$ *büyüklüğü* $6m$*'dir. Pozitif-x ekseni yönündedir.* $x - y$ *düzleminde bulunan bir* $\overrightarrow{B}$*'nün büyüklüğü* $4m$*'dir ve pozitif x doğrultusu ile* 30° *açı yapmaktadır.* $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = ?$

$$\overrightarrow{A} = (6m)\hat{i}, \tag{1.48}$$
$$\overrightarrow{B} = (4m)\cos(30^o)\hat{i} + (4m)\sin(30^o)\hat{j}, \tag{1.49}$$
$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = (24m^2\cos(30^o))\hat{i} \times \hat{i} + (24m^2\sin(30^o))\hat{i} \times \hat{j}, \tag{1.50}$$
$$= (12m^2)\hat{k}. \tag{1.51}$$

1.3 ÖDEV SET 1

1. Aşağıda verilen vektörün.

$$\vec{u} = \frac{3}{5}\hat{i} - \frac{4}{5}\hat{j},$$

   (a) Birim vektör olduğunu gösterin.

   (b) $\vec{v}$, $\vec{w}$ rastgele iki adet birim vektör olsun. Bunların $\vec{u}$'ya dik olması için $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ ne olmalıdır?

2.

$$\vec{B} = x\hat{i} + (3m)\hat{j},$$
$$\vec{C} = (2m)\hat{i} + y\hat{j}.$$

   vektörlerinin $\vec{A} = (5m)\hat{i} + (6m)\hat{j}$ vektörüne dik olabilmesi için x ve y ne olmalıdır?

3. xy düzleminde C vektörünün büyüklüğü 12 birim, yönü ise $\theta = 60$ derecedir. $\vec{A}$'de yine aynı düzlemde 6 birim şiddetinde ve $\theta = 30$ derecedir. $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ olmak üzere B vektörünün yönünü ve büyüklüğünü bulunuz.

4. Aşağıdaki vektörleri göz önüne alarak

$$\vec{u} = \frac{\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{2}}, \vec{v} = \frac{-\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{2}}, \vec{w} = \hat{k},$$

   (a) Bu vektörlerin birim vektörler olduklarını gösterin.

   (b) Bu vektörlerin birbirlerine dik olduklarını gösterin.

   (c) Bu vektörlerin çiftler olarak alarak tüm vektörel çarpımlarını hesaplayın.

   (d) Bu vektörlerin çiftler olarak skaler çarpımlarını bulunuz.

5. Keyfi birimlerle ifade edilen $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin bileşenleri $A_x = 3,2$, $A_y = 1,6$, $B_x = 0,50$ ve $B_y = 4,5$'dır.

   (a) İki vektör arasındaki açıyı bulunuz.

   (b) Büyüklüğü $5,0$ birim ve $x - y$ düzleminde bulunan $\vec{A}$ vektörüne dik olan $\vec{C}$ vektörünün bileşenlerini bulunuz.

Chapter 2

DOĞRUSAL HAREKET

[1]

Mekanik: Kuvvet - madde ve hareket arasındaki ilişkidir.
Kinematik: Mekaniğin bir bölümüdür, Hareket nedir sorusunu cevaplar.
Dinamik: Hareketin sebepleri ve ilişkileri nedir sorusunu cevaplar.

En basit hareket türü, bir cismin doğrusal hareketidir. Tek boyutlu bir harekettir.

Hareketi tanımlamak için iki adet fiziksel nicelik: **Hız** ve **İvme**

2.1 Yerdeğiştirme ve Hız

Bir hareketi tanımlamak ve incelemek için koordinat sistemini tanımlamak gerekir. Parçacığın t_1 anındaki koordinatı $x_1(t_1)$, t_2 anındaki koordinatı $x_2(t_2)$ olsun.

Yerdeğiştirme vektörü x_1'den x_2'e çizilen vektördür ve $\triangle\vec{x}(t)$ ile gösterelim.

$$|\triangle\vec{x}(t)| \equiv \big(x_2(t_2) - x_1(t_1)\big) \tag{2.1}$$

Hız ise birim zamandaki yerdeğiştirmedir. Vektörel bir büyüklüktür.

2.1.1 Ortalama Hız

Ortalama Hızın x-bileşeni veya **Ortalama x-Hızı** yerdeğiştirmenin gerçekleştiği zaman aralığı $\triangle t \equiv (t_2 - t_1)$ olmak üzere

$$|\vec{v}_{ort-x}(t)| \equiv \frac{|\triangle\vec{x}(t)|}{\triangle t} = \frac{\big(x_2(t_2) - x_1(t_1)\big)}{(t_2 - t_1)} \tag{2.2}$$

Burada dikkat edilmesi gereken şey şudur. Zaman aralığı her zaman pozitiftir fakat seçtiğimiz yöne göre yerdeğiştirme negatif veya pozitif olacaktır. Bu da ortalama hız vektörünü değiştirecektir. O halde hareketi tanımlarken

[1] Bu dersnotları sadece eğitim amaçlıdır. Başka amaçla çoğaltılamaz.

KOORDİNAT SEÇİMİNİ hemen yapmamız ve bunu *AÇIKCA* göstermemiz gerekmektedir.

Örnek 7. *Bir yarış arabası* $t_1 = 1,0sn$*'de orijinden* $19m$ *uzakta,* $t_2 = 4,0sn$*'de ise yine orijinden* $277m$ *uzakta olsun. Ortalama hızın bileşenini bulunuz.*

$$|\vec{v}_{ort-x}(t)| = \frac{(277m - 19m)}{(4,0sn - 1,0sn)} = 86\left(\frac{m}{sn}\right) \tag{2.3}$$

2.1.2 Anlık Hız

Bir parçacığın belirli bir zaman aralığındaki ortalama hızı, parçacığın herhangi bir andaki hızımı, yönünü belli etmez. Zaman aralığımı kısaltarak ortalama hızdan **ANLIK HIZ** elde ederiz.

$$|\vec{v}_x(t)| = \lim_{\triangle t \to 0} |\vec{v}_{ort-x}(t)| \equiv \lim_{\triangle t \to 0} \frac{|\triangle \vec{x}(t)|}{\triangle t} = \frac{d|\vec{x}(t)|}{dt} \tag{2.4}$$

Örnek 8. *Bir çita, gözlemci aracın* $20m$ *doğusunda pusuda bekliyor.* $t = 0$*'da ceylana saldırıyor ve doğrusal bir yol ile koşuyor. Saldırmanın ilk* $2sn$*'si içinde çitanın konumu* $x(t) = \left(20m\right) + \left(5\frac{m}{sn^2}\right)t^2$ *denklemine uyuyor olsun.*

- *Çitanın* $t_1 = 1sn$ *ile* $t_2 = 2sn$ *arasındaki yerdeğiştirmesini bulun.*

$$\begin{aligned} x(t_1 = 1sn) &= \left(20m\right) + \left(5\frac{m}{sn^2}\right)(1sn)^2, \\ &= 25m, && (2.5) \\ x(t_2 = 2sn) &= \left(20m\right) + \left(5\frac{m}{sn^2}\right)(2sn)^2, \\ &= 40m, && (2.6) \\ |\triangle \vec{x}(t)| &= x(t_2) - x(t_1), \\ &= 15m. && (2.7) \end{aligned}$$

- *Bu zaman aralığındaki ortalama hızı nedir?*

$$\begin{aligned} |\vec{v}_{ort-x}(t)| &= \frac{\triangle x(t)}{\triangle t}, \\ &= \frac{(15m)}{(2,0sn - 1,0sn)}, \\ &= 15\left(\frac{m}{sn}\right). && (2.8) \end{aligned}$$

- *Çitanın $t_1 = 1sn$ anındaki anlık hızını $\triangle t = 0,1sn$ alarak bulunuz. Aynı ana anlık anlık hızını $\triangle t = 0,01sn$ ve $\triangle t = 0,001sn$ alarak tekrar bulunuz.*

$$\triangle t = 0,1sn; \quad t_1 = 1sn \quad t_2 = 1,1sn \tag{2.9}$$
$$x(t_1 = 1sn) = \left(20m\right) + \left(5\frac{m}{sn^2}\right)(1sn)^2 = 25m,$$
$$x(t_2 = 1,1sn) = \left(20m\right) + \left(5\frac{m}{sn^2}\right)(1,1sn)^2 = 26,05m,$$
$$|\vec{v}_x(t)| = \lim_{\triangle t \to 0} |\vec{v}_{ort-x}(t)| = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle x(t)}{\triangle t} = \frac{26,05m - 25m}{0,1sn} = 10,5\frac{m}{sn}.$$

$$\triangle t = 0,01sn; \quad t_1 = 1sn \quad t_2 = 1,01sn \tag{2.10}$$
$$x(t_1 = 1sn) = \left(20m\right) + \left(5\frac{m}{sn^2}\right)(1sn)^2 = 25m,$$
$$x(t_2 = 1,01sn) = \left(20m\right) + \left(5\frac{m}{sn^2}\right)(1,01sn)^2 = 25,1005m,$$
$$|\vec{v}_x(t)| = \lim_{\triangle t \to 0} |\vec{v}_{ort-x}(t)| = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle x(t)}{\triangle t} = \frac{25,1005m - 25m}{0,01sn} = 10,05\frac{m}{sn}.$$

$$\triangle t = 0,001sn; \quad t_1 = 1sn \quad t_2 = 1,001sn \tag{2.11}$$
$$x(t_1 = 1sn) = \left(20m\right) + \left(5\frac{m}{sn^2}\right)(1sn)^2 = 25m,$$
$$x(t_2 = 1,001sn) = \left(20m\right) + \left(5\frac{m}{sn^2}\right)(1,001sn)^2 = 25,010005m,$$
$$|\vec{v}_x(t)| = \lim_{\triangle t \to 0} |\vec{v}_{ort-x}(t)| = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle x(t)}{\triangle t} = \frac{25,010005m - 25m}{0,001sn} = 10,005\frac{m}{sn}.$$

Zaman aralığı küçüldükçe hız 10m/sn'ye yaklaşıyor. Dolayısıyla anlık hıza ulaşılmış oluyor.

- *Anlık hızı zamanın fonksiyonu olarak veren genel bir ifade oluşturun. Bu ifadeyi kullanarak anlık hızı $t_1 = 1sn$ ve $t_2 = 2sn$ anlarında bulunuz.*

$$|\vec{v}_x(t)| = \frac{dx(t)}{dt},$$
$$x(t) = \left(20m\right) + \left(5\frac{m}{sn^2}\right)t^2,$$
$$\Rightarrow |\vec{v}_x(t)| = 10t\left(\frac{m}{sn^2}\right), \tag{2.12}$$
$$|\vec{v}_x(1sn)| = 10(1sn)\left(\frac{m}{sn^2}\right) = 10\left(\frac{m}{sn}\right), \tag{2.13}$$
$$|\vec{v}_x(2sn)| = 10(2sn)\left(\frac{m}{sn^2}\right) = 20\left(\frac{m}{sn}\right). \tag{2.14}$$

2.1.3 Hız ve Sürat

Sıklıkla karıştırılan iki kavrama açıklık getirelim.

Sürat ortalama veya anlık anlamında da olsa her zaman **Gidilen Mesafenin Zamana bölümüdür.** SKALER bir büyüklüktür. Anlık sürat, anlık hızın büyüklüğüdür ve hep **POZİTİFTİR**.

Hız ise vektörel büyüklüktür, hem yönü hemde sürati belirtir.

Örnek 9. *Ortalama hızların* $|\vec{v}_x(t)| = 25m/sn$ *ve* $|\vec{v}_x(t)| = -25m/sn$ *olduğunu düşünelim. Bu değerleri hız ve sürat anlamında değerlendirin.*

Ortalama hız ilk değer için seçilen pozitif yön doğrultusunda ikincisi ise seçilen yönün ters yönünde olduğunu ifade eder. Ortalama sürat her iki değer içinde aynıdır ve $25m/sn$'dir.

Ev ödevi 6. $50m$*'lik bir yüzme parkurunda bir tur yüzen sürücünün ortalama hızı ve sürati nasıl değerlendirilmelidir?*

2.2 İvme

Hızı birim zamanda konumda olan değişim olarak tanımlamıştık. **İvme**'de en genel tanımla birim zamanda hızda olan değişimdir. Vektörel bir büyüklüktür.

2.2.1 Ortalama İvme

Tek boyutta bir hareket olsun. Parçacık t_1 anında P_1 noktasında ve anlık hızının x-bileşeni $|\vec{v}_x(t_1)|$ olsun, aynı parçacığın t_2 anında P_2 noktasında ve anlık hızının x-bileşeni $|\vec{v}_x(t_2)|$ olsun.

$$\triangle t \equiv (t_2 - t_1) \tag{2.15}$$

zaman aralığında parçacığın anlık hızının x bileşenin değişimi

$$\triangle|\vec{v}_x(t)| \equiv |\vec{v}_x(t_2)| - |\vec{v}_x(t_1)| \tag{2.16}$$

ile tanımlanır. O halde P_1 noktasından P_2 noktasına giden parçacığın **Ortalama İvmenin x-bileşeni** veya **Ortalama x-İvmesi**

$$|\vec{a}_{ort-x}(t)| \equiv \frac{\triangle|\vec{v}_x(t)|}{\triangle t} = \frac{\big(|\vec{v}_x(t_2)| - |\vec{v}_x(t_1)|\big)}{(t_2 - t_1)}. \tag{2.17}$$

İvmenin birimi MKS birim sisteminde m/sn^2'dir.

Örnek 10. *Bir Astronot uzay aracından çıkarak uzayda bir doğru boyunca (tek boyutlu) hareket ediyor. Diğer astronot $2sn$'de bir hız ölçümü yapıyor. İlk hız ölçümünün $t_1 = 1,0sn$'de yapıldığını varsayalım.*

1,0sn	*3,0sn*	*5,0sn*	*7,0sn*	*9,0sn*	*11,0sn*	*13,0sn*	*15,0sn*
$0,8\frac{m}{sn}$	$1,2\frac{m}{sn}$	$1,6\frac{m}{sn}$	$1,2\frac{m}{sn}$	$-0,4\frac{m}{sn}$	$-1,0\frac{m}{sn}$	$-1,6\frac{m}{sn}$	$-0,8\frac{m}{sn}$

Yukarıdaki tablo kullanılarak aşağıda belirtilen zaman aralıkları için ortalama x-ivmesini bulunuz. Ayrıca astronotun süratinin artma ve azalma bakışıyla tartışınız.

- $t_1 = 1,0sn$ *ve* $t_2 = 3,0sn$

$$|\vec{a}_{ort-x}(t)| = \frac{\big(|\vec{v}_x(t_2)| - |\vec{v}_x(t_1)|\big)}{(t_2 - t_1)} = \frac{1,2\frac{m}{sn} - 0,8\frac{m}{sn}}{3,0sn - 1,0sn} = 0,2\left(\frac{m}{sn^2}\right).$$

  Parçacığın sürati $0,8m/sn$*'den* $1,2m/sn$ *çıkmıştır.*

- $t_3 = 5,0sn$ *ve* $t_4 = 7,0sn$

$$|\vec{a}_{ort-x}(t)| = \frac{\big(|\vec{v}_x(t_4)| - |\vec{v}_x(t_3)|\big)}{(t_4 - t_3)} = \frac{1,2\frac{m}{sn} - 1,6\frac{m}{sn}}{7,0sn - 5,0sn} = -0,2\left(\frac{m}{sn^2}\right).$$

  Parçacığın sürati $1,6m/sn$*'den* $1,2m/sn$ *inmiştir.*

- $t_5 = 9,0sn$ *ve* $t_6 = 11,0sn$

$$|\vec{a}_{ort-x}(t)| = \frac{\big(|\vec{v}_x(t_6)| - |\vec{v}_x(t_5)|\big)}{(t_6 - t_5)} = \frac{-1,0\frac{m}{sn} - \left(-0,4\frac{m}{sn}\right)}{11,0sn - 9,0sn} = -0,3\left(\frac{m}{sn^2}\right).$$

  Parçacığın sürati $0,4m/sn$*'den* $1,0m/sn$ *çıkmıştır.*

- $t_7 = 13,0sn$ *ve* $t_8 = 15,0sn$

$$|\vec{a}_{ort-x}(t)| = \frac{\big(|\vec{v}_x(t_8)| - |\vec{v}_x(t_7)|\big)}{(t_8 - t_7)} = \frac{-0,8\frac{m}{sn} - \left(-1,6\frac{m}{sn}\right)}{15,0sn - 13,0sn} = 0,4\left(\frac{m}{sn^2}\right).$$

  Parçacığın sürati $1,6m/sn$*'den* $0,8m/sn$ *inmiştir.*

2.2.2 Anlık İvme

Tıpkı hızdaki gibi bir parçacığın belirli bir zaman aralığındaki ortalama ivmesi, parçacığın herhangi bir andaki ivmesini belli etmez. Zaman aralığını kısaltarak ortalama ivmeden **ANLIK İVME** elde edilir.

$$|\vec{a}_x(t)| = \lim_{\triangle t \to 0} |\vec{a}_{ort-x}(t)| \equiv \lim_{\triangle t \to 0} \frac{|\triangle \vec{v}_x(t)|}{\triangle t} = \frac{d|\vec{v}_x(t)|}{dt} \tag{2.18}$$

Örnek 11. *Bir arabanın anlık hızının şiddeti*

$$|\vec{v}_x(t)| = 60\left(\frac{m}{sn}\right) + 0,5\left(\frac{m}{sn^3}\right)t^2 \tag{2.19}$$

ile verilmiş olsun.

- *Arabanın* $t_1 = 1,0sn$ *ile* $t_2 = 3,0sn$ *aralığındaki hız değişikliği ne kadardır?*

$$\begin{aligned}
&t_1 = 1,0sn \quad |\vec{v}_x(1,0sn)| = 60\left(\frac{m}{sn}\right) + 0,5\left(\frac{m}{sn^3}\right)(1sn)^2 = 60,5\left(\frac{m}{sn}\right),\\
&t_2 = 3,0sn \quad |\vec{v}_x(3,0sn)| = 60\left(\frac{m}{sn}\right) + 0,5\left(\frac{m}{sn^3}\right)(3sn)^2 = 64,5\left(\frac{m}{sn}\right),\\
&\triangle|\vec{v}_x(t)| \equiv |\vec{v}_x(t_2)| - |\vec{v}_x(t_1)| = 4,0\left(\frac{m}{sn}\right).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

- *O zaman aralığındaki ortalama ivme bileşeni nedir?*

$$\triangle t = t_2 - t_1 = 2,0sn \tag{2.21}$$

$$|\vec{a}_{ort-x}(t)| = \frac{|\vec{v}_x(t_2)| - |\vec{v}_x(t_1)|}{t_2 - t_1} = \frac{4,0\left(\frac{m}{sn}\right)}{2,0sn} = 2,0\left(\frac{m}{sn^2}\right) \tag{2.22}$$

- *Anlık ivmeyi* t_1sn*'deki değerini önce* $\triangle t = 0,1sn$*,* $\triangle t = 0,01sn$ *ve sonra* $\triangle t = 0,001sn$ *alarak bulunuz.*

$$\begin{aligned}
&\triangle t = 0,1sn; \qquad t_1 = 1sn \qquad t_2 = 1,1sn\\
&|\vec{v}_x(t_1 = 1,0sn)| = 60\left(\frac{m}{sn}\right) + 0,5\left(\frac{m}{sn^3}\right)(1,0sn)^2 = 60,5\left(\frac{m}{sn}\right)\\
&|\vec{v}_x(t_2 = 1,1sn)| = 60\left(\frac{m}{sn}\right) + 0,5\left(\frac{m}{sn^3}\right)(1,1sn)^2 = 60,605\left(\frac{m}{sn}\right)\\
&|\vec{a}_x(t)| = \lim_{\triangle t\to 0}|\vec{a}_{ort-x}(t)| = \lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle|\vec{v}_x(t)|}{\triangle t}\\
&\qquad = \frac{60,605\left(\frac{m}{sn}\right) - 60,5\left(\frac{m}{sn}\right)}{0,1sn} = 1,05\left(\frac{m}{sn^2}\right).
\end{aligned}$$

$$\triangle t = 0,01sn; \quad t_1 = 1sn \quad t_2 = 1,01sn$$
$$|\vec{v}_x(t_1 = 1,0sn)| = 60\left(\frac{m}{sn}\right) + 0,5\left(\frac{m}{sn^3}\right)(1,0sn)^2 = 60,5\left(\frac{m}{sn}\right)$$
$$|\vec{v}_x(t_2 = 1,01sn)| = 60\left(\frac{m}{sn}\right) + 0,5\left(\frac{m}{sn^3}\right)(1,01sn)^2 = 60,51005\left(\frac{m}{sn}\right)$$
$$|\vec{a}_x(t)| = \lim_{\triangle t \to 0} |\vec{a}_{ort-x}(t)| = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle|\vec{v}_x(t)|}{\triangle t}$$
$$= \frac{60,51005\left(\frac{m}{sn}\right) - 60,5\left(\frac{m}{sn}\right)}{0,01sn} = 1,005\left(\frac{m}{sn^2}\right).$$

$$\triangle t = 0,001sn; \quad t_1 = 1sn \quad t_2 = 1,001sn$$
$$|\vec{v}_x(t_1 = 1,0sn)| = 60\left(\frac{m}{sn}\right) + 0,5\left(\frac{m}{sn^3}\right)(1,0sn)^2 = 60,5\left(\frac{m}{sn}\right)$$
$$|\vec{v}_x(t_2 = 1,001sn)| = 60\left(\frac{m}{sn}\right) + 0,5\left(\frac{m}{sn^3}\right)(1,001sn)^2 = 60,5010005\left(\frac{m}{sn}\right)$$
$$|\vec{a}_x(t)| = \lim_{\triangle t \to 0} |\vec{a}_{ort-x}(t)| = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle|\vec{v}_x(t)|}{\triangle t}$$
$$= \frac{60,5010005\left(\frac{m}{sn}\right) - 60,5\left(\frac{m}{sn}\right)}{0,001sn} = 1,0005\left(\frac{m}{sn^2}\right).$$

Zaman aralığı küçüldükçe ivme $1,0m/sn^2$'ye yaklaşıyor. Dolayısıyla anlık ivmeye ulaşılmış olunuyor.

- *Herhangi bir an için anlık ivme ifadesini türetiniz. Özel olarak $t_1 = 1sn$ ve $t_2 = 3sn$'deki anlık ivmelerinin bileşenini hesaplayınız.*

$$\begin{aligned}
|\vec{a}_x(t)| &= \frac{d|\vec{v}_x(t)|}{dt}, \\
|\vec{v}_x(t)| &= 60\left(\frac{m}{sn}\right) + 0,5\left(\frac{m}{sn^3}\right)t^2, \\
\Rightarrow |\vec{a}_x(t)| &= 1,0t\left(\frac{m}{sn^3}\right), && (2.23) \\
|\vec{a}_x(1sn)| &= (1sn)\left(\frac{m}{sn^3}\right) = 1,0\left(\frac{m}{sn^2}\right), && (2.24) \\
|\vec{a}_x(3sn)| &= (3sn)\left(\frac{m}{sn^3}\right) = 3,0\left(\frac{m}{sn^2}\right). && (2.25)
\end{aligned}$$

2.3 SabİT İvmelİ Hareket

- En basit ivmeli harekettir. İsminden de anlaşıldığı gibi hareket boyunca ivme sabittir, yani *hızında değişme olmaktadır.*
- $|\vec{v}|$ hız bileşeni sabit aralıklarda eş miktarda değişir, fakat konumdaki değişim eş değildir.

Sabit pozitif ivmeli doğrusal hareketi düşünelim. Böyle bir hareket için ivme zaman grafiğinde fonksiyonun altında kalan alan neyi ifade eder?

$$|\vec{a}_{ort-x}(t)| = \frac{|\vec{v}_x(t_2)| - |\vec{v}_x(t_1)|}{t_2 - t_1} \tag{2.26}$$

tanımında $t_1 = 0$, $t_2 = t$ olsun. Bu anlardaki ilk hızın x-bileşeni $|\vec{v}_x(0)| \equiv v_{0x}$, $|\vec{v}_x(t_2 = t)| \equiv v_x(t)$ olsun. O halde herhangi bir andaki hızın bileşeni

$$\begin{aligned} |\vec{a}_{ort-x}(t)| &= \frac{v_x(t) - v_{0x}}{t - 0} \\ \Rightarrow v_x(t) &= v_{0x} + |\vec{a}_{ort-x}(t)|t. \end{aligned} \tag{2.27}$$

ile elde edilir. Doğrusal olarak artan hız zaman grafiğinin altında kalan alanı düşünelim. Bu doğrusal artan bir grafiktir yani bir yamuk alanıdır. Bu alanı nasıl hesaplarız?

$$\begin{aligned} \frac{[v_x(t) - v_{0x}](t - 0)}{2} + v_{0x}t &= \frac{[v_x(t) + v_{0x}]t}{2} \\ &= |\vec{v}_{ort-x}(t)|t \end{aligned}$$

$|\vec{v}_{ort-x}(t)| \equiv \frac{\left[x_2(t_2) - x_1(t_1)\right]}{(t_2 - t_1)}$ olduğunu hatırlarsak

$$\begin{aligned} \frac{[v_x(t) + v_{0x}]t}{2} &= \frac{\left[x_2(t) - x_1(0)\right]}{(t - 0)}t \\ x_2(t) &= x_1(0) + \frac{[v_x(t) + v_{0x}]t}{2} \\ &= x_1(0) + \frac{[v_{0x} + |\vec{a}_{ort-x}(t)|t + v_{0x}]t}{2} \\ &= x_1(0) + v_{0x}t + \frac{|\vec{a}_{ort-x}(t)|}{2}t^2. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Bu ifade çok iyi bildiğimiz

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \tag{2.29}$$

ifadesinin üniversiteli öğrenciler düzeyinde yeniden elde edilmesidir. Sizden beklenen de bunu bu şekliyle anlamanızdır.

Özetle bu kısımda sabit ivmeli hareket için geçerli olan iki önemli ifade geliştirilmiştir.

$$x_2(t) = x_1(0) + v_{0x}t + \frac{|\vec{a}_{ort-x}(t)|}{2}t^2 \tag{2.30}$$

$$v_x(t) = v_{0x} + |\vec{a}_{ort-x}(t)|t. \tag{2.31}$$

Konumun zamanla değişimin bir parabol denklemi olduğuna dikkat ediniz.

Örnek 12. *Konum, hız ve ivmeyi zamandan bağımsız olarak birbirine bağlayan ifadeyi türetiniz.*

$$x_2(t) = x_1(0) + v_{0x}t + \frac{|\vec{a}_{ort-x}(t)|}{2}t^2 \tag{2.32}$$

ifadesindeki t'lerden kurtulmamız lazım. Bunun için diğer ifadeden t'yi çekiyoruz.

$$t = \frac{v_x(t) - v_{0x}}{|\vec{a}_{ort-x}(t)|}$$

yukarıda yerine koyunca

$$x_2(t) = x_1(0) + v_{0x}\frac{v_x(t) - v_{0x}}{|\vec{a}_{ort-x}(t)|} + \frac{|\vec{a}_{ort-x}(t)|}{2}\left[\frac{v_x(t) - v_{0x}}{|\vec{a}_{ort-x}(t)|}\right]^2 \tag{2.33}$$

düzenleme yaparsak

$$[v_x(t)]^2 = [v_{0x}]^2 + 2[x_2(t) - x_1(0)]|\vec{a}_{ort-x}(t)| \tag{2.34}$$

elde ederiz. Dikkat ediniz bu ifade her zaman geçerli değildir sadece sabit ivmeli harekette elde edilir.

Örnek 13. *Sabit ivme ile doğuya ilerleyen bir motosikletlinin ivmesinin şiddeti* $4m/s^2$*'dir.* $t = 0$ *anında başlangıç noktasından* $5m$ *doğusunda olduğunu kabul edelim. İlk hızı ise* $15m/s$ *doğu yönünde olsun.*

- $t = 2s$ *anındaki hızını ve konumunu bulunuz.*

  Koordinat sistemini doğu yönünde pozitif olarak seçelim.

$$\begin{aligned} \vec{a}_{ort-x}(t) &= 4\big(m/s^2\big)\hat{i} \\ \vec{x}_1(0) &= 5\big(m\big)\hat{i} \\ \vec{v}_{0x} &= 15\big(m/s\big)\hat{i}. \end{aligned}$$

  Hızı $\vec{v}_x(t) = \vec{v}_{0x} + \vec{a}_{ort-x}(t)t$ *kullanılarak*

$$\begin{aligned} \vec{v}_x(t = 2sn) &= 15\big(m/s\big)\hat{i} + 4\big(m/s^2\big)\hat{i}(2s) \\ &= 23\big(m/s\big)\hat{i}. \end{aligned}$$

Konumu ise $\vec{x}_2(t) = \vec{x}_1(0) + \vec{v}_{0x}t + \frac{\vec{a}_{ort-x}(t)}{2}t^2$ *kullanarak*

$$\begin{aligned}\vec{x}_2(t=2s) &= 5\big(m\big)\hat{i} + 15\big(m/s\big)\hat{i}(2s) + \frac{4\big(m/s^2\big)\hat{i}}{2}(2s)^2, \\ &= 43(m)\hat{i}.\end{aligned}$$

- *Hızının bileşeni* $25m/s$ *iken konumu nedir?*

  İki yolla çözülebiliriz. Önce zaman bulunur ve bu zamana karşılık gelen konum elde edilebilir. Fakat bu yol uzundur. Diğer yol ise zamandan bağımsız ifadenin kullanılmasıyla kolayca elde edilir.

  $[v_x(t)]^2 = [v_{0x}]^2 + 2[x_2(t) - x_1(0)]|\vec{a}_{ort-x}(t)|$

$$\begin{aligned}x_2(t) &= x_1(0) + \frac{\Big[[v_x(t)]^2 - [v_{0x}]^2\Big]}{2|\vec{a}_{ort-x}(t)|} \\ &= 5(m) + \frac{\big[25(m/s) - 15(m/s)\big]\big[25(m/s) + 15(m/s)\big]}{2 \times 4(m/s^2)} \\ &= 55(m).\end{aligned}$$

Ev ödevi 7. *Bir sürücü sabit* $54km/saat$ *süratle hız limitinin* $30km/saat$ *olduğu yerleşke içinde hareket etmektedir. Hız ihlalini tespit eden motosikletli polis* $3m/s^2$ *ivme ile takibe başlar.*

- *Polis aracı kaç saniyede yakalar?*
- *Polisin aracı yakaladığı andaki sürati nedir?*
- *Polis aracı yakalıncaya kadar her iki aracın da aldığı yolu bulunuz. Eşit olması mantıklı mıdır?*

2.4 Serbest DüŞen CİSİMLER

En iyi bilinen sabit ivmeli hareket örneği olarak düşünülebilinir. Dünyanın yerçekimi etkisiyle serbest düşen cisimlerin hareketini belirler. İdeal bir sistemde

- düşülen mesafe dünya yarıçapından küçük,
- dünyanın dönmesiyle oluşan ivmenin ihmal edildiği,
- sürtünmelerin dikkate alınmadığı

kabul edilir. Böyle bir ideal sistemde ivme dünyanın merkezine doğru olmak üzere $9,8(m/s^2)$ alınacaktır. Bu değer ayın yüzeyinde $1,6(m/s^2)$'ye düşerken, güneşimiz için $270\big(m/s^2\big)$ olduğu tahmin edilmektedir.

Örnek 14. *1TL'lik madeni para Falezlerden aşağıya serbest bırakıldığında*

- *$t = 1s$'de konum ve hızını bulunuz.*

  Koordinat sistemini Falezden başlamak üzere yukarı doğru pozitif olarak seçelim. İvme $\vec{a}_x(t) = -9,8(m/s^2)\hat{i}$, başlangıç noktası $x_1(t = 0s) = 0m$ ve başlangıç hızı $v_{0x} = 0(m/s)$.

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_1(0) + v_{0x}t + \frac{|\vec{a}_{ort-x}(t)|}{2}t^2 \\ \vec{x}_2(t = 1s) &= 0 + [-4,9(m/s^2)\hat{i}(1s)^2] = -4,9(m)\hat{i}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{0x} + |\vec{a}_{ort-x}(t)|t, \\ \vec{v}_x(1sn) &= 0 + [-9,8(m/s^2)\hat{i}(1s)] = -9,8(m/s)\hat{i}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

- *$t = 2s$'de konum ve hızını bulunuz.*

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_1(0) + v_{0x}t + \frac{|\vec{a}_{ort-x}(t)|}{2}t^2 \\ \vec{x}_2(t = 2s) &= 0 + [-4,9(m/s^2)\hat{i}(2s)^2] = -19,6(m)\hat{i}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{0x} + |\vec{a}_{ort-x}(t)|t, \\ \vec{v}_x(2sn) &= 0 + [-9,8(m/s^2)\hat{i}(2s)] = -19,6(m/s)\hat{i}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

- *$t = 3s$'de konum ve hızını bulunuz.*

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_1(0) + v_{0x}t + \frac{|\vec{a}_{ort-x}(t)|}{2}t^2 \\ \vec{x}_2(t = 3s) &= 0 + [-4,9(m/s^2)\hat{i}(3s)^2] = -44,1(m)\hat{i}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{0x} + |\vec{a}_{ort-x}(t)|t, \\ \vec{v}_x(3sn) &= 0 + [-9,8(m/s^2)\hat{i}(3s)] = -29,4(m/s)\hat{i}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Örnek 15. *Yüksek bir binanın damından yukarı doğru bir topu $15(m/s)$ hızla atalım. Yerçekim ivmesinin şiddeti $9,8(m/s^2)$ olsun.*

- *Topun elden çıktığı andan itibaren zamanı başlatırsak, topun $t = 1s$ ve $t = 4s$'de konum ve hızını bulunuz.*

  Binanın tepesinin merkez olarak seçildiği ve yukarı yönün pozitif olduğu bir koordinat sistemi seçelim.

Bu koordinat sistemine göre ivme $\vec{a}_x(t) = -9,8(m/s^2)\hat{i}$*, başlangıç noktası* $\vec{x}_1(t = 0s) = 0(m)\hat{i}$ *ve başlangıç hızı* $\vec{v}_{0x} = 15(m/s)\hat{i}$*.*

$$\begin{aligned} \vec{x}_2(t) &= \vec{x}_1(0) + \vec{v}_{0x}t + \vec{a}_{ort-x}(t)\frac{t^2}{2} \\ \vec{x}_2(t = 1s) &= 0 + 15(m/s)\hat{i}(1s) + [-4,9(m/s^2)\hat{i}(1s)^2] = 10,1(m)\hat{i}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_x(t) &= \vec{v}_{0x} + \vec{a}_{ort-x}(t)t, \\ \vec{v}_x(1sn) &= 15(m/s)\hat{i} + [-9,8(m/s^2)\hat{i}(1s)] = 5,2(m/s)\hat{i}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_2(t) &= \vec{x}_1(0) + \vec{v}_{0x}t + \frac{\vec{a}_{ort-x}(t)}{2}t^2 \\ \vec{x}_2(t = 4s) &= 0 + 15(m/s)\hat{i}(4s) + \frac{[-9,8(m/s^2)\hat{i}(4s)^2]}{2} = -18,4(m)\hat{i}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_x(t) &= \vec{v}_{0x} + \vec{a}_{ort-x}(t)t, \\ \vec{v}_x(1sn) &= 15(m/s)\hat{i} + [-9,8(m/s^2)\hat{i}(4s)] = -24,2(m/s)\hat{i}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

- *Top damdan* $5m$ *yüksekte iken hızı nedir?*

  Hatırlayalım zamandan bağımsız olarak hız, yerdeğiştirme ve ivmeyi

$$[v_x(t)]^2 = [v_{0x}]^2 + 2[x_2(t) - x_1(0)]|\vec{a}_{ort-x}(t)| \tag{2.45}$$

  ile buluyorduk. Başlangıç ile $5m$ *yer değiştirdiğini söylüyor o halde* $x_2(t) - x_1(0) = 5m$ *olacaktır. Yerine koyarsak*

$$\begin{aligned} &[v_x(t)]^2 = [15(m/s)]^2 + 2[5(m)][-9,8(m/s^2)] \\ &\Rightarrow v_x(t) = \mp 11,26(m/s). \end{aligned} \tag{2.46}$$

- *Topun ulaştığı maksimum yükseklik nedir?*

  Topun ulaştığı maksimum yükseklikte hızı sıfır olacaktır.

$$\begin{aligned} &[v_x(t)]^2 = [v_{0x}]^2 + 2[x_2(t) - x_1(0)]|\vec{a}_{ort-x}(t)| \\ &0 = [15(m/s)]^2 + 2[x_2(t_{mak})][-9,8(m/s^2)] \\ &x_2(t_{mak}) = \frac{225(m^2/s^2)}{19,6(m/s^2)} = 11,5m \end{aligned} \tag{2.47}$$

- *Bu yüksekliğe ulaşması için geçen zamanı bulunuz.*

  Hızın sıfır olması için geçecek süre

$$\begin{aligned} \vec{v}_x(t) &= \vec{v}_{0x} + \vec{a}_{ort-x}(t)t, && (2.48) \\ \vec{v}_x(t_{mak}) &= 15(m/s)\hat{i} + [-9,8(m/s^2)\hat{i}(t_{mak})] = 0\hat{i}. \\ t_{mak} &= \frac{15(m/s)}{9,8(m/s^2)} = 1,53s. && (2.49) \end{aligned}$$

- *Topun maksimum yüksekliğe ulaştığı andaki ivmesi nedir?*

  Topun ivmesi her zaman sabit ve yerçekim ivmesidir.

$$\vec{a}_x(t) = -9,8(m/s^2)\hat{i}$$

2.5 İntegrasyonla Hız ve İvme

Anlık hız ve/veya ivme her zaman sabit kalmayabilir. Ne yapmalıyız

$$\begin{aligned} \vec{a}_x(t) &= \frac{d\vec{v}_x(t)}{dt} && (2.50) \\ \int d\vec{v}_x(t) &= \int \vec{a}_x(t)dt && (2.51) \\ \int_0^t d\vec{v}_x(t) &= \int_0^t \vec{a}_x(t)dt && (2.52) \\ \vec{v}_x(t) - \vec{v}_x(0) = &= \int_0^t \vec{a}_x(t)dt, && (2.53) \\ \vec{v}_x(t) &= \vec{v}_{0x} + \int_0^t \vec{a}_x(t)dt. && (2.54) \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \vec{v}_x(t) &= \frac{d\vec{x}(t)}{dt} && (2.55) \\ \int d\vec{x}(t) &= \int \vec{v}_x(t)dt && (2.56) \\ \int_0^t d\vec{x}(t) &= \int_0^t \vec{v}_x(t)dt && (2.57) \\ \vec{x}(t) - \vec{x}(0) &= \int_0^t \vec{v}_x(t)dt, && (2.58) \\ \vec{x}(t) &= \vec{x}(0) + \int_0^t \vec{v}_x(t)dt. && (2.59) \end{aligned}$$

Örnek 16. *Sabit ivmeli hareket için bir boyutta hız ve konum vektörlerini integral yöntemiyle elde ediniz.*

Sabit ivmeli hareketin $\vec{a}_x(t) = a\hat{i}$ *olduğunu kabul edelim. Burada* a *sabit bir sayıdır.*

O halde hız vektörü

$$\begin{aligned}
\vec{v}_x(t) &= \vec{v}_{0x} + \int_0^t \vec{a}_x(t)dt \\
&= \vec{v}_{0x} + \int_0^t adt\hat{i} \\
&= \vec{v}_{0x} + a\int_0^t dt\hat{i} \\
&= \vec{v}_{0x} + at\hat{i}. && (2.60) \\
&= \vec{v}_{0x} + \vec{a}_{ort-x}(t)t. && (2.61)
\end{aligned}$$

daha önce elde ettiğimiz hız ifadesini bulduk. Konum ise

$$\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= \vec{x}(0) + \int_0^t \vec{v}_x(t)dt \\
&= \vec{x}(0) + \int_0^t dt\left[\vec{v}_{0x} + at\hat{i}\right], \\
&= \vec{x}(0) + \int_0^t dt\vec{v}_{0x} + a\int_0^t dtt\hat{i}, \\
&= \vec{x}(0) + \vec{v}_{0x}t + \frac{at^2}{2}\hat{i}. && (2.62) \\
&= \vec{x}_1(0) + \vec{v}_{0x}t + \vec{a}_{ort-x}(t)\frac{t^2}{2}. && (2.63)
\end{aligned}$$

Ev ödevi 8. *Bir bisikletli* $t = 0s$ *iken pozitif* x *yönünde* $x = 50m$*'de bir trafik lambasının yakınından* $10(m/s)$ *süratle geçer. Zamana göre değişken ivmesinin şiddeti ise* $a_x(t) = 2(m/s^2) - 0,1(m/s^3)t$*'dir.*

- *Bisikletlinin x-hızını ve konumunu zamanın bir fonksiyonu olarak bulunuz.*

$$\begin{aligned}
v_x(t) &= 10(m/s) + 2t(m/s^2) - 0,05t^2(m/s^3). \\
x(t) &= 50(m) + 10t(m/s) + t^2(m/s^2) - \frac{0,05}{3}t^3(m/s^3).
\end{aligned}$$

- *x-hızı ne zaman en büyük değerine ulaşır?*

$$t = 20s$$

- *x-hızının en büyük değeri nedir?*

$$v_x(t = 20s) = 30(m/s)$$

- *x-hızı en büyük değerine eriştiğinde bisikletin konumu nedir?*

$$x(t = 20s) = 517(m).$$

2.6 ÖDEV SET 2

1. Bir ceylan durgunluktan başlayarak $50m$ mesafede en yüksek hızı olan $25m/s$'ye çıkabilir ve bu hızla uzun süre koşabilir. Bir panter ise durgunluktan başlayarak $60m$ mesafede en yüksek hızı olan $30m/s$'ye çıkabilir ve bu hızla yalnızca $4s$ koşabilir. Panter bir ceylana saldırmadan önce ne kadar yaklaşmalıdır.

2. Bir tenis topunu yerden $4m$ yükseklikten ve durgunluktan bırakırsanız yere düştükten sonra yaklaşık $1m$ yükseğe sıçrar.

   (a) Topun yere çarpmadan hemen önceki hızı nedir?

   (b) Top yere çarptıktan sonra sıçrarken, yerle teması kesildiği andaki hızını bulunuz.

   (c) Topun yere çarpma anında $2mm$ kadar büzüldüğünü varsayıp, yerle temas halindeyken oluşan ivmesinin büyüklüğünü ve yönünü; yavaşlarken ve hızlanırken bulunuz.

   (d) Bu hesapları yaparken hangi varsayımlarda bulunmalısınız?

3. Bir araç v_0 sabit süratiyle $+x$ doğrultusunda hareket etmektedir. Konumu x_0 olduğu yerde motoru kapatılıyor. Aracın konumu zamana göre veren fonksiyonu k bir sabit olmak üzere aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right).$$

   (a) k'nın birimi nedir?

   (b) Herhangi bir t anı için aracın hızını veren ifadeyi bulunuz.

   (c) Herhangi bir t anı için aracın ivmesini veren ifadeyi bulunuz.

   (d) İvmenin minimum ve maksimum olduğu zamanı bulunuz.

4. $50m$ yükseklikteki bir binanın üzerinde bir top $20m/s$ süratle dikey olarak yukarı atılıyor.

   (a) Binanın üstüne göre topun çıkacağı maksimum yükseklik nedir?

   (b) Topun binanın üst hizasına tekrar gelene kadar geçecek süre nedir?

   (c) Atıştan $5s$ sonra topun konumu nedir?

   (d) Topun yere çakılma anındaki hızı nedir?

   (e) Topun havada bulunduğu toplam uçuş süresi nedir?

Chapter 3

İKİ ve ÜÇ BOYUTTA HAREKET

[1] Geçen bölümde doğrusal hareketi yani TEK BOYUTLU HAREKETİ incelemiştik, şimdi genelleştirmeyi yapacağız.

3.1 KONUM ve HIZ VEKTÖRLERİ

Bir hareketi tanımlamak ve incelemek için Parçacığın t_1 anındaki koordinatı $\Big(x_1(t_1); y_1(t_1); z_1(t_1)\Big)$, t_2 anındaki koordinatı $\Big(x_2(t_2); y_2(t_2); z_2(t_2)\Big)$ olsun. Diğer bir gösterimle parçacığın ilk konumu $\vec{r}(t_1) = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$, son konumu ise $\vec{r}(t_2) = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$'dır.

3.1.1 Yerdeğiştirme vektörü

Yerdeğiştirme vektörü son konum vektöründen ilk konum vektörünğn çıkarımı yani iki nokta arasında çizilen vektördür ve $\triangle\vec{r}(\triangle t)$ ile gösterilir.

$$\begin{aligned}\triangle\vec{r}(\triangle t) &\equiv \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)\\ &= \Big(x_2 - x_1\Big)\hat{i} + \Big(y_2 - y_1\Big)\hat{j} + \Big(z_2 - z_1\Big)\hat{k}.\end{aligned}$$

3.1.2 Ortalama Hız

Hız ise birim zamandaki yerdeğiştirmedir. Vektörel bir büyüklüktür. **Ortalama Hız vektörü** yerdeğiştirmenin gerçekleştiği zaman aralığı $\triangle t \equiv (t_2 - t_1)$ olmak üzere

[1] Bu dersnotları sadece eğitim amaçlıdır. Başka amaçla çoğaltılamaz.

$$\begin{aligned}\vec{v}_{ort}(\triangle t) &\equiv \frac{\triangle\vec{r}(\triangle t)}{\triangle t} \qquad (3.1)\\ &= \frac{\Big(x_2(t_2)-x_1(t_1)\Big)\hat{i}+\Big(y_2(t_2)-y_1(t_1)\Big)\hat{j}+\Big(z_2(t_2)-z_1(t_1)\Big)\hat{k}}{(t_2-t_1)}.\end{aligned}$$

3.1.3 Anlık Hız

Anlık hız, ortalama hızın zaman aralığının sıfıra giderkenki anlık değeridir.

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &\equiv \lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle\vec{r}(\triangle t)}{\triangle t}\\ &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt}. \qquad (3.2)\end{aligned}$$

Parçacığın yolu üzerindeki herhangi bir noktadaki anlık hız vektörü yolun o noktasına teğettir.

Anlık hız vektörünün bileşenleri ve hız vektörünün şiddeti:

$$\begin{aligned}v_x(t) &= \frac{dx(t)}{dt} \qquad (3.3)\\ v_y(t) &= \frac{dy(t)}{dt} \qquad (3.4)\\ v_z(t) &= \frac{dz(t)}{dt} \qquad (3.5)\\ |\vec{v}(t)| &= \sqrt{v_x^2(t)+v_y^2(t)+v_z^2(t)}. \qquad (3.6)\end{aligned}$$

Örnek 17. *Bir robot araç Mars'ın yüzeyine konuyor. Başlangıç noktası olarak konduğu yer alınsın. Mars yüzeyinin düz olduğunu yani hareketin sadece $x-y$ düzleminde olduğunu kabul edelim. Robotu noktasal bir cisim olarak kabullenelim ve hareketi*

$$\begin{aligned}x(t) &= (2,0m)-(0,25m/s^2)t^2\\ y(t) &= (1,0m/s)t+(0,025m/s^3)t^3.\end{aligned}$$

fonksiyonları ile gözlemleyelim.

- *$t=2s$ için aracın konum vektörünü yazınız.*

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j} \qquad (3.7)\\ \vec{r}(t) &= \Big[\Big((2,0m)-(0,25m/s^2)t^2\Big)\hat{i}+\Big((1,0m/s)t+(0,025m/s^3)t^3\Big)\hat{j}\Big]\\ \vec{r}(t=2s) &= \Big[\Big((2,0m)-(0,25m/s^2)(2s)^2\Big)\hat{i}+\Big((1,0m/s)(2s)+(0,025m/s^3)(2s)^3\Big)\hat{j}\Big]\\ &= \Big[(1,0m)\hat{i}+(2,2m)\hat{j}\Big]\end{aligned}$$

- *Başlangıç noktasından uzaklığını hesaplayınız.*

  Başlangıç noktasından uzaklığı bulmak için başlangıç konumunu da bulmalıyız.

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \left[\left((2,0m)-(0,25m/s^2)t^2\right)\hat{i}+\left((1,0m/s)t+(0,025m/s^3)t^3\right)\hat{j}\right] \\
\vec{r}(t=0s) &= \left[\left((2,0m)-(0,25m/s^2)(0s)^2\right)\hat{i}+\left((1,0m/s)(0s)+(0,025m/s^3)(0s)^3\right)\hat{j}\right] \\
&= \left[(2,0m)\hat{i}+(0m)\hat{j}\right] \\
\vec{r}(t=2s) &= \left[\left((2,0m)-(0,25m/s^2)(2s)^2\right)\hat{i}+\left((1,0m/s)t+(0,025m/s^3)(2s)^3\right)\hat{j}\right] \\
&= \left[(1,0m)\hat{i}+(2,2m)\hat{j}\right]
\end{aligned}$$

  Yer değiştirme vektörü

$$\begin{aligned}
\triangle\vec{r}(t_2-t_1) &= \vec{r}(t=2s)-\vec{r}(t=0s) \\
&= \left[(-1,0m)\hat{i}+(2,2m)\hat{j}\right]
\end{aligned}$$

  Başlangıç noktasından uzaklığı ise

$$|\triangle\vec{r}(t_2-t_1)| = \sqrt{(-1,0m)^2+(2,2m)^2} = 2,41m.$$

- *Ortalama hız vektörlerini $t_1 = 0$ ve $t_2 = 2s$ aralığında bulunuz.*

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \left[\left((2,0m)-(0,25m/s^2)t^2\right)\hat{i}+\left((1,0m/s)t+(0,025m/s^3)t^3\right)\hat{j}\right] \\
\vec{r}(t=0s) &= \left[\left((2,0m)-(0,25m/s^2)(0s)^2\right)\hat{i}+\left((1,0m/s)(0s)+(0,025m/s^3)(0s)^3\right)\hat{j}\right] \\
&= \left[(2,0m)\hat{i}+(0m)\hat{j}\right] \\
\vec{r}(t=2s) &= \left[\left((2,0m)-(0,25m/s^2)(2s)^2\right)\hat{i}+\left((1,0m/s)t+(0,025m/s^3)(2s)^3\right)\hat{j}\right] \\
&= \left[(1,0m)\hat{i}+(2,2m)\hat{j}\right]
\end{aligned}$$

  Ortalama hız vektörü

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{ort}(t) &\equiv \frac{\triangle\vec{r}(t)}{\triangle t} \qquad (3.8) \\
&= \frac{\vec{r}(t=2s)-\vec{r}(t=0s)}{(2s-0s)} \\
&= \frac{\left[(1,0m)\hat{i}+(2,2m)\hat{j}\right]-\left[(2,0m)\hat{i}+(0m)\hat{j}\right]}{2s} \\
&= \left[(-0,5m)\hat{i}+(1,1m)\hat{j}\right].
\end{aligned}$$

- *Aracın anlık hız vektörünü zamana bağlı olarak veren bir ifade bulunuz ve $t = 2s$'de anlık hız vektörünü bulunuz.*

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\Big[\Big((2,0m) - (0,25m/s^2)t^2\Big)\hat{i} + \Big((1,0m/s)t + (0,025m/s^3)t^3\Big)\hat{j}\Big] \\
&= \Big[\Big(-(0,25m/s^2)2t\Big)\hat{i} + \Big((1,0m/s) + (0,025m/s^3)3t^2\Big)\hat{j}\Big].
\end{aligned}$$

$2s$'deki anlık hız vektörü ise

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t=2s) &= \Big[\Big(-(0,25m/s^2)2(2s)\Big)\hat{i} + \Big((1,0m/s) + (0,025m/s^3)3(2s)^2\Big)\hat{j}\Big] \\
&= \Big[-(1,0m/s)\hat{i} + (1,3m/s)\hat{j}\Big].
\end{aligned}$$

Sürati ve yönü ise

$$\begin{aligned}
|\vec{v}(t=2s)| &= \sqrt{\Big(-(1,0m/s)\Big)^2 + \Big(1,3m/s\Big)^2} = 1,64m/s \\
\tan\theta &= \frac{v_y(t)}{v_x(t)} = -\frac{1,3m/s}{1,0m/s} = -1,3 \\
\theta &= 128.
\end{aligned}$$

3.2 İvme

Üç boyutta hızın değişme miktarını belirten fiziksel niceliği tanımlayacağız.

3.2.1 Ortalama İvme

$$\vec{a}_{ort}(t) \equiv \frac{\triangle\vec{v}(t)}{\triangle t} = \frac{\vec{v}_2(t_2) - \vec{v}_1(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{3.9}$$

ile yazılır. Bileşenler cinsinden bunu

$$|\vec{a}_{ort-x}(t)| \equiv = \frac{|\vec{v}_{2x}(t_2)| - |\vec{v}_{1x}(t_1)|}{t_2 - t_1}. \tag{3.10}$$

$$|\vec{a}_{ort-y}(t)| \equiv = \frac{|\vec{v}_{2y}(t_2)| - |\vec{v}_{1y}(t_1)|}{t_2 - t_1}. \tag{3.11}$$

$$|\vec{a}_{ort-z}(t)| \equiv = \frac{|\vec{v}_{2z}(t_2)| - |\vec{v}_{1z}(t_1)|}{t_2 - t_1}. \tag{3.12}$$

$$\vec{a}_{ort}(t) = \frac{|\vec{v}_{2x}(t_2)| - |\vec{v}_{1x}(t_1)|}{t_2 - t_1}\hat{i} + \frac{|\vec{v}_{2y}(t_2)| - |\vec{v}_{1y}(t_1)|}{t_2 - t_1}\hat{j} + \frac{|\vec{v}_{2z}(t_2)| - |\vec{v}_{1z}(t_1)|}{t_2 - t_1}\hat{k}.$$

ile de ifade edilebilinir.

3.2.2 Anlık İvme

Anlık ivme ise zaman aralığının sıfıra gitmesi ile tanımladığımız için bunu

$$\begin{aligned}
\vec{a}(t) &\equiv \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle \vec{v}(t)}{\triangle t} \\
&= \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y(t)}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z(t)}{dt}\hat{k}, && (3.13)\\
&= \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt}\hat{\imath} + \frac{d^2y(t)}{dt}\hat{\jmath} + \frac{d^2z(t)}{dt}\hat{k} && (3.14)
\end{aligned}$$

Örnek 18. *Örnek 17'deki robotun anlık hız vektörünü*

$$\vec{v}(t) = \Big[\Big(-(0,25m/s^2)2t\Big)\hat{\imath} + \Big((1,0m/s) + (0,025m/s^3)3t^2\Big)\hat{\jmath}\Big].$$

bulmuştuk.

- *$t = 0s$ ile $t = 2s$ aralığındaki ortalama ivme vektörünü bulunuz.*

  $t = 0s$ anındaki hız vektörü

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t=0s) &= \Big[\Big(-(0,25m/s^2)2(0s)\Big)\hat{\imath} + \Big((1,0m/s) + (0,025m/s^3)3(0s)^2\Big)\hat{\jmath}\Big] \\
&= (1,0m/s)\hat{\jmath}.
\end{aligned}$$

  $t = 2s$ anındaki hız vektörü

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t=2s) &= \Big[\Big(-(0,25m/s^2)2(2s)\Big)\hat{\imath} + \Big((1,0m/s) + (0,025m/s^3)3(2s)^2\Big)\hat{\jmath}\Big] \\
&= \Big[-(1,0m/s)\hat{\imath} + (1,3m/s)\hat{\jmath}\Big].
\end{aligned}$$

  Bu aralıktaki ortalama ivme vektörü ise

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{ort}(t) &= \frac{\Big[-(1,0m/s)\hat{\imath} + (1,3m/s)\hat{\jmath}\Big] - \Big[(1,0m/s)\hat{\jmath}\Big]}{(2s - 0s)}, \\
&= -(0,50m/s^2)\hat{\imath} + (0,15m/s^2)\hat{\jmath}.
\end{aligned}$$

- *Aynı aralıktaki ortalama ivme vektörünün şiddetini ve yönünü bulunuz.*

$$\begin{aligned}
|\vec{a}_{ort}| &= \sqrt{\Big[-(0,50m/s^2)\Big]^2 + \Big[(0,15m/s^2)\Big]^2} = (0,52m/s^2). \\
\tan\theta &= -\frac{0,15m/s^2}{0,50m/s^2} = -0,30.
\end{aligned}$$

  θ açısı yaklaşık 164 derecedir.

- *$t = 0s$ ve $t = 2s$ anlarındaki anlık ivmesini bulunuz. Herhangi bir an için anlık ivme*

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z(t)}{dt}\hat{k}, \\ &= \Big[\Big(-(0,25m/s^2)2\Big)\hat{i} + \Big((0,025m/s^3)6t\Big)\hat{j}\Big].\end{aligned} \tag{3.15}$$

$t = 0s$ için anlık ivme vektörü

$$\begin{aligned}\vec{a}(t=0s) &= \Big[\Big(-(0,25m/s^2)2\Big)\hat{i} + \Big((0,025m/s^3)6(0s)\Big)\hat{j}\Big] \\ &= -(0,50m/s^2)\hat{i}.\end{aligned}$$

$t = 2s$ için anlık ivme vektörü

$$\begin{aligned}\vec{a}(t=2s) &= \Big[\Big(-(0,25m/s^2)2\Big)\hat{i} + \Big((0,025m/s^3)6(2s)\Big)\hat{j}\Big] \\ &= -(0,50m/s^2)\hat{i} + (0,30m/s^2)\hat{j}.\end{aligned}$$

- *$t = 2s$ anındaki ivme vektörünün şiddetini ve yönünü bulunuz.*

$$\begin{aligned}|\vec{a}(t=2s)| &= \sqrt{\Big[-(0,50m/s^2)\Big]^2 + \Big[(0,30m/s^2)]^2} = (0,58m/s^2). \\ \tan\theta &= -\frac{0,50m/s^2}{0,30m/s^2} = -0,60.\end{aligned}$$

θ açısı yaklaşık 149 *derecedir.*

3.3 İvmenin Paralel ve Dik Bileşenleri

İvme vektörü bir parçacığın hızındaki değişikliği bize gösterir. İvme vektörü, hız vektörü ve yerdeğiştirme vektörleri farklıdır. Parçacığın ivme vektörünün hız vektörüne paralel bileşen ve dik bileşen olarak ayırdığımızı düşünelim. Paralel bileşen hızın şiddetini artırır veya azaltırken, dik bileşen ise parçacığın yönünü değiştiren etki yaratır.

1. $\vec{a}_{paralel}$, vektörünün hız vektörüne izdüşümü pozitif ise, cismin hız vektörü artar.

2. $\vec{a}_{paralel}$, vektörünün hız vektörüne izdüşümü negatif ise, cismin hız vektörü azalır.

3. $\vec{a}_{paralel}$, vektörünün hız vektörüne izdüşümü SIFIR ise, cismin hız vektörü değişir fakat **sürati** değişmez.

Örnek 19. *Örnek17 ve Örnek18'de anlık hız ve anlık ivme vektörlerini bulduk. $t = 2s$ anındaki ivmenin hız vektörüne paralel ve dik bileşenlerini bulunuz.*

$t = 2s$ anındaki hız vektörü

$$\begin{aligned}\vec{v}(t=2s) &= \Big[-(1,0m/s)\hat{i} + (1,3m/s)\hat{j}\Big].\\ \vec{a}(t=2s) &= \Big[-(0,50m/s^2)\hat{i} + (0,30m/s^2)\hat{j}\Big].\end{aligned}$$

İki vektör arasındaki açı

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\vec{a}(t=2s)\cdot\vec{v}(t=2s)}{|\vec{a}(t=2s)||\vec{v}(t=2s)|}\\ &= \frac{\Big[-(0,50m/s^2)\hat{i} + (0,30m/s^2)\hat{j}\Big]\cdot\Big[-(1,0m/s)\hat{i} + (1,3m/s)\hat{j}\Big]}{(0,58m/s^2)(1,64m/s)}\\ &= \frac{\Big[(0,50m/s^2)(1,0m/s) + (0,30m/s^2)(1,3m/s)\Big]}{(0,58m/s^2)(1,64m/s)}\\ &= \frac{0,89(m^2/s^3)}{0,95(m^2/s^3)}\\ &= 0,93\end{aligned}$$

θ açısı yaklaşık 21 derece çıkıyor. Aslında bu 21 derecelik açı diğer bir yolla $149 - 128 = 21$'den de hesaplanabilirdi. İvmenin paralel bileşeni

$$\begin{aligned}\vec{a}_{paralel}(t=2s) &= \vec{a}(t=2s)\cos(21)\\ &= \Big[-(0,46m/s^2)\hat{i} + (0,28m/s^2)\hat{j}\Big].\end{aligned}$$

İvmenin dik bileşeni

$$\begin{aligned}\vec{a}_{dik}(t=2s) &= \vec{a}(t=2s)\sin(21)\\ &= \Big[-(0,18m/s^2)\hat{i} + (0,11m/s^2)\hat{j}\Big].\end{aligned}$$

3.4 Eğik Atış Hareketi

Belirli bir ilk hızla hareket eden ve sadece yerçekimin etkisinde hareketine devam eden cisimlerin hareketine **EĞİK ATIŞ HAREKETİ** ismi verilir.

3.4.1 İki Boyutta Eğik Atış Hareketi

Kolaylık olsun diye hareket sadece $x - y$ düzlemi üzerinde olsun. İvme vektörü

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j}\\ &= 0\hat{i} - g\hat{j}.\end{aligned}$$

Tek boyutta hareketi incelerken

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{0x} + a_x(t)t \\ x(t) &= x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} \\ v_x^2(t) &= v_{0x}^2 + 2(x - x_0)a_x. \end{aligned}$$

ifadelerini bulmuştuk. $a_x = 0$ ve $a_y = -g$ kullanarak

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{0x} \\ x(t) &= x_0 + v_{0x}t. \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} v_y(t) &= v_{0y} - gt \\ y(t) &= y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} \\ v_y^2(t) &= v_{0y}^2 - 2g(y - y_0). \end{aligned}$$

elde edilir. Yerdeğiştirme, hız ve ivme vektörleri

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = \Big[x_0 + v_{0x}t\Big]\hat{i} + \Big[y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}\Big]\hat{j} \tag{3.16}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \Big[v_{0x}\Big]\hat{i} + \Big[v_{0y} - gt\Big]\hat{j} \tag{3.17}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = -g\hat{j} \tag{3.18}$$

Yörünge hareketini yorumlarsak

- x doğrultusunda ivmesel bir değişim yoktur. Sabit hızla hareket devam eder.
- y doğrultusunda yerçekim ivmesi etki ediyor. Yörüngenin parabolik olduğuna dikkat edin.
- Başlangıç konumu $\vec{r}(0) = 0$ seçelim. Dolayısıyla $x_0 = 0$ ve $y_0 = 0$ seçilmiş olur. Yerçekim vektörü $\vec{r}(t) = \Big[v_{0x}t\Big]\hat{i} + \Big[v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}\Big]\hat{j}$ haline gelmiş oldu.
- Başlangıç süratini $|\vec{v}(0)| = v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$ gibi ifade edebiliriz.

  $v_{0x} = v_0\cos(\theta)$ ve $v_{0y} = v_0\sin(\theta)$. Dolayısıyla yer değiştirme ve hız vektörleri

$$\vec{r}(t) = \Big[v_0\cos(\theta)t\Big]\hat{\imath} + \Big[v_0\sin(\theta)t - \frac{gt^2}{2}\Big]\hat{\jmath} \tag{3.19}$$

$$\vec{v}(t) = \Big[v_0\cos(\theta)\Big]\hat{\imath} + \Big[v_0\sin(\theta) - gt\Big]\hat{\jmath} \tag{3.20}$$

$$\vec{a}(t) = -g\hat{\jmath}. \tag{3.21}$$

Örnek 20. *Yüksek bir binanın tepesinde bulunan bir adamın ortalama hızı sabit ve yatay doğrultuda $9,0m/s$ olarak belirlenmiştir. Binanın kenarında düşmeye başlayan bu adamın $0,50s$ sonraki binadan uzaklığı ve hızı ne olur?*

Önce bir koordinat ekseni belirleyelim. Hareket iki boyutludur ve pozitif yatay doğrultuyu doğuya pozitif dikey doğruyu ise kuzeye doğru seçelim. Orijin olarak ise binanın tam kenarı olsun yani $t = 0s$'de hareket burada başlamış olsun $x_0 = 0$ ve $y_0 = 0$. Bu durumda adamın başlangıç hız vektörü

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} &\vec{v}_0(t) = (9,0m/s)\hat{\imath} \\ &v_x(t = 0s) = 9,0(m/s) \\ &v_y(t = 0s) = 0. \end{aligned}$$

olur. Hareket boyunca yatay ivmesi bileşeni sıfırdır. Dikey ivme bileşeni ise yerçekim ivmesidir. Vektörel olarak bunu

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} &\vec{a}(t) = 0\hat{\imath} - (9,8m/s^2)\hat{\jmath} \\ &a_x(t) = 0 \\ &a_y(t) = -9,8m/s^2. \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Buna ait çözümleri yukarıda incelemiştik.

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \Big[x_0 + v_{0x}t + \frac{a_xt^2}{2}\Big]\hat{\imath} + \Big[y_0 + v_{0y}t + \frac{a_yt^2}{2}\Big]\hat{\jmath} \\ &= \Big[v_{0x}t\Big]\hat{\imath} + \Big[\frac{a_yt^2}{2}\Big]\hat{\jmath} \\ \vec{v}(t) &= \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \Big[v_{0x}\Big]\hat{\imath} + \Big[a_yt\Big]\hat{\jmath} \\ \vec{a}(t) &= \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = a_y\hat{\jmath}. \end{aligned}$$

Böylelikle yerdeğiştirme vektörünü

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \Big[9,0(m/s)t\Big]\hat{\imath} - \Big[\frac{9,8(m/s^2)t^2}{2}\Big]\hat{\jmath} \\ \vec{r}\Big(t = \frac{1}{2}(s)\Big) &= \Big[9,0(m/s)\frac{1}{2}(s)\Big]\hat{\imath} - \Big[9,8(m/s^2)\frac{1}{8}(s^2)\Big]\hat{\jmath} \\ \vec{r}\Big(t = \frac{1}{2}(s)\Big) &= 4,5(m)\hat{\imath} - 1,2(m)\hat{\jmath}. \end{aligned}$$

Binandan olan uzaklık ise bu vektörün şiddetidir. $\Big|\vec{r}\Big(t = \frac{1}{2}(s)\Big)\Big| = 4,7(m)$

Hız vektörü ise

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \Big[v_{0x}\Big]\hat{i} + \Big[a_y t\Big]\hat{j} \\
&= 9,0(m/s)\hat{i} - 9,8(m/s^2)t\hat{j} \\
\vec{v}\Big(t = \frac{1}{2}(s)\Big) &= 9,0(m/s)\hat{i} - 9,8(m/s^2)\frac{1}{2}(s)\hat{j} \\
&= 9,0(m/s)\hat{i} - 4,9(m/s)\hat{j}.
\end{aligned}$$

Eğer hızının şiddeti (sürati) ve yönü de merak edilirse

$$\begin{aligned}
\left|\vec{v}\Big(t = \frac{1}{2}(s)\Big)\right| &= 10,2(m/s) \\
\tan\theta &= \frac{-4,9}{9,0} \\
\theta &\approx 331^o
\end{aligned}$$

Örnek 21. *Bir top yatay eksen ile 53°'lik açı yaparak ve $37,0(m/s)$ sürat ile yerçekimli bir yerde harekete başlamaktadır.*

- *$t = 2,0s$'de topun konum vektörünü bulunuz.*

  Önce bir koordinat ekseni belirleyelim. Hareket iki boyutludur ve pozitif yatay doğrultuyu doğuya pozitif dikey doğruyu ise kuzeye doğru seçelim. Orijin olarak ise topun harekete başladığı noktayı alalım $x_0 = 0$ ve $y_0 = 0$. Bu durumda başlangıç hız vektörü

$$\begin{aligned}
& \vec{v}_0(t) = (37,0m/s)\cos(53)\hat{i} + (37,0m/s)\sin(53)\hat{j} \\
\Rightarrow \quad & v_x(t = 0s) = 22,2(m/s) \\
& v_y(t = 0s) = 29,6(m/s).
\end{aligned}$$

  olur. Hareket boyunca yatay ivmesi bileşeni sıfırdır. Dikey ivme bileşeni ise yerçekim ivmesidir. Vektörel olarak bunu

$$\begin{aligned}
& \vec{a}(t) = 0\hat{i} - (9,8m/s^2)\hat{j} \\
\Rightarrow \quad & a_x(t) = 0 \\
& a_y(t) = -9,8m/s^2.
\end{aligned}$$

  olarak yazabiliriz. Yerdeğiştirme vektörü

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \Big[x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}\Big]\hat{i} + \Big[y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}\Big]\hat{j} \\
&= \Big[v_{0x}t\Big]\hat{i} + \Big[v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}\Big]\hat{j} \\
\vec{v}(t) &= \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \Big[v_{0x}\Big]\hat{i} + \Big[v_{0y} + a_y t\Big]\hat{j} \\
\vec{a}(t) &= \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = a_y\hat{j}.
\end{aligned}$$

Böylelikle yerdeğiştirme vektörünü

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \Big[22,2(m/s)t\Big]\hat{i} + \Big[29,6(m/s)t - \frac{9,8(m/s^2)t^2}{2}\Big]\hat{j} \\
\vec{r}\Big(t = 2(s)\Big) &= \Big[22,2(m/s)2(s)\Big]\hat{i} + \Big[29,6(m/s)2(s) - 9,8(m/s^2)\frac{(2s)^2}{2}\Big]\hat{j} \\
\vec{r}\Big(t = 2(s)\Big) &= 44,4(m)\hat{i} + 39,6(m)\hat{j}.
\end{aligned}$$

- *$t = 2,0s$'de topun başlangıç noktasından olan uzaklığı nedir?*

$$\left|\vec{r}\Big(t = 2(s)\Big)\right| = 59,5(m)$$

- *$t = 2,0s$'de topun hız vektörünü ve süratini bulunuz.*

  Hız vektörü

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= \frac{d}{dt}\vec{r}(t) \\
&= \frac{d}{dt}\left[\Big[22,2(m/s)t\Big]\hat{i} + \Big[29,6(m/s)t - \frac{9,8(m/s^2)t^2}{2}\Big]\hat{j}\right] \\
&= \Big[22,2(m/s)\Big]\hat{i} + \Big[29,6(m/s) - 9,8(m/s^2)t\Big]\hat{j}.
\end{aligned}$$

  Böylelikle $2s$'deki hız vektörü

$$\begin{aligned}
\vec{v}\Big(t = 2(s)\Big) &= \Big[22,2(m/s)\Big]\hat{i} + \Big[29,6(m/s) - 9,8(m/s^2)2(s)\Big]\hat{j} \\
&= 22,2(m/s)\hat{i} + 10,0(m/s)\hat{j}.
\end{aligned}$$

  buluruz. Sürati ise $\left|\vec{v}\Big(t = 2(s)\Big)\right| = 24,3(m/s)$ *'dir.*

- *Top uçusu sırasında dikey doğrultuda en yüksek noktasına kaç saniyede ulaşır.*

  Hız vektörünü

  $\vec{v}(t) = \Big[22,2(m/s)\Big]\hat{i} + \Big[29,6(m/s) - 9,8(m/s^2)t\Big]\hat{j}$

  bulmuştuk. Dikey doğrultuda hızının bileşeni sıfır olduğunda en yüksek noktaya ulaşmış olacaktır. Bu da

$$\begin{aligned}
t &= \frac{29,6(m/s)}{9,8(m/s^2)} \\
&= 3,0(s)
\end{aligned}$$

- *Top uçusu sırasında dikey doğrultuda ulaşacağı en yüksek noktanın koordinatlarını bulunuz.*

  Konum vektörünü
  $\vec{r}(t) = \Big[22,2(m/s)t\Big]\hat{i} + \Big[29,6(m/s)t - \frac{9,8(m/s^2)t^2}{2}\Big]\hat{j}$
  bulmuştuk. Konum vektörü o anda

$$\begin{aligned}\vec{r}(t=3,0s) &= \Big[22,2(m/s)3,0(s)\Big]\hat{i} + \Big[29,6(m/s)3,0(s) - \frac{9,8(m/s^2)(3,0s)^2}{2}\Big]\hat{j} \\ &= 66,6(m)\hat{i} + 44,7(m)\hat{j}.\end{aligned}$$

  Koordinatlar $(66,6m; 44,7m)$. *Başlangıç noktasına uzaklığının ne olduğunu hesaplamayı size bırakıyorum.*

- *Top yatay doğrultuda en uzak hangi noktaya erişir.*

  Yatay doğrultuda en uzak erişime maksimum yüksekliğe çıktığı sürenin iki katında ulaşır.

$$\begin{aligned}\vec{r}(t=6,0s) &= \Big[22,2(m/s)6,0(s)\Big]\hat{i} + \Big[29,6(m/s)6,0(s) - \frac{9,8(m/s^2)(6,0s)^2}{2}\Big]\hat{j} \\ &= 133,2(m)\hat{i} + 0\hat{j}.\end{aligned}$$

  Yerdeğişim vektörünün dikey bileşeninin sıfırlandığına dikkat ediniz. (Sayılar yaklaşıktır.)

Ev ödevi 9. *İlk hızının şiddeti* v_0 *ve ilk açısı* α_0 *olan,* $\Big(0 < \alpha_0 < 90\Big)$ *olmak üzere, bir cisim düşey yönde yerçekimi ivmesi altında bir hareket yapıyor. Bu cismin ulaşacağı maksimum yükseklik* h_{mak} *ve yatayda alacağı maksimum uzaklık olan R'yi verilenler cinsinden hesaplayınız.*

Cevap:

$$\begin{aligned}h_{mak} &= \frac{v_0^2\sin^2(\alpha_0)}{2g} \\ R &= \frac{v_0^2\sin(2\alpha_0)}{g}\end{aligned}$$

Örnek 22. *Yerden* $8m$ *yüksekteki pencereden bir topu* $10,0(m/s)$ *ilk hız şiddetiyle yatayla* 20 *derecelik bir açı ile aşağıya doğru atıyoruz. Top pencereden ne kadar uzağa düşecektir. (Tüm sürtünmeler ihmal edilmektedir.)*

Öncelikle koordinat eksenini belirleyelim. Doğu yönü pozitif $-x$*, kuzey yönü de pozitif* $-y$ *eksenleri olsun. Başlangıç noktası koordinat ekseninin orijini olsun. Böylece*

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0, \\
y_0 &= 0, \\
&\Rightarrow \vec{r}(t=0s) = 0\hat{i} + 0\hat{j}. \\
v_{0x} &= v_0 \cos(340) \\
v_{0y} &= v_0 \sin(340) \\
&\Rightarrow \vec{v}(t=0s) = 10,0(m/s)\cos(20)\hat{i} - 10,0(m/s)\sin(20)\hat{j}, \\
a_x &= 0 \\
a_y &= -g \\
&\Rightarrow \vec{a}(t) = 0\hat{i} - 9,8(m/s^2)\hat{j}.
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Yerdeğiştirme vektörü

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \Big[x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}\Big]\hat{i} + \Big[y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}\Big]\hat{j} \\
&= \Big[9,4(m/s)t\Big]\hat{i} + \Big[-3,4(m/s)t - \frac{9,8(m/s^2)t^2}{2}\Big]\hat{j}.
\end{aligned}$$

bilmediğimiz bir t_d *düşme anında top yere düşmektedir. O andaki yerdeğiştirme vektörünün düşey bileşeni* $-8(m)\hat{j}$ *olmalıdır. Yatay bileşenini ise bilememekteyiz. Bu bilgiyi kullanarak*

$$\begin{aligned}
\vec{r}_y(t_d) &= -8(m)\hat{j} \\
&= \Big[-3,4(m/s)t_d - \frac{9,8(m/s^2)(t_d)^2}{2}\Big]\hat{j}. \\
&\Rightarrow 4,9(m/s^2)(t_d)^2 + 3,4(m/s)(t_d) - 8(m) = 0.
\end{aligned}$$

elde edilir ikinci dereceden olan bu denklem çözülürse düşme zamanı

$$\begin{aligned}
t_d &= \frac{-(3,4(m/s)) \mp \sqrt{(3,4(m/s))^2 - 4(4,9(m/s^2))(-8(m))}}{2(4,9(m/s^2))} \\
&= 0,97(s).
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu zamanı yerdeğiştirme vektöründe yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t_d = 0,97s) &= \Big[9,4(m/s)(0,97s)\Big]\hat{i} + \Big[-3,4(m/s)(0,97s) - \frac{9,8(m/s^2)(0,97s)^2}{2}\Big]\hat{j} \\
&= 9,1(m)\hat{i} - 7,9(m)\hat{j}.
\end{aligned}$$

çıkıyor. Aslında y bileşeni $-8(m)$ çıkmalıydı ama hesap makinesi kullanırken bazı yaklaşıklıklar yaptığımdan sonuçta az da olsa bir farklılık oldu. Bu noktaya kafanızı fazla takmayınız. Önemli olan pencereden ne kadar uzağa düştüğünü hesaplamak dolayısıyla yerdeğiştirme vektörünün şiddetini alacağız.

$$\left|\vec{r}(t_d = 0,97s)\right| = 12,0(m)$$

bulunmaktadır.

Ev ödevi 10. *Bir maymun hayvanat bahçesinden kaçıp bir ağaca tırmanıyor. Maymunu indirmeye ikna edemeyen görevli ona bir uyuşturucu ok atıyor. Kaçmak isteyen maymun okun namludan çıktığı an dalı bırakıyor. Bu koşullar altında okun hızı ne olursa olsun, maymun yere varmadan ona ulaştığı takdirde maymunun vurulacağını ispat ediniz.*

3.5 Dairesel Hareket

Bir parçacık eğri bir yörüngede hareket ederken hızının yönü değişir. Sürati sabit olsa bile hız vektörü değişmiştir. Dolayısıyla bir ivmeye sahiptir.

1. Eğrisel yolda hızlalan bir cismin, hız vektörü ile ivme vektörü arasında $[0, 90^o]$ arasında değişen bir açı vardır. İvmenin hıza paralel bileşeni hız vektörünü paralel yönde artırırken, ivmenin dik bileşeni hız vektörün yönünü değiştirir.

2. Eğrisel yolda yavaşlayan bir cismin, hız vektörü ile ivme vektörü arasında $[90^o, 180^o]$ arasında değişen bir açı vardır. İvmenin hıza paralel bileşeni hız vektörünü paralel yönde azaltırken, ivmenin dik bileşeni hız vektörün yönünü değiştirir.

3. İvme ile Hız vektörleri arasındaki açı 90° ise, Hızın şiddeti olan Sürat değişmez fakat ivme hız vektörünü değiştirir. Hareket bir merkez etrafında dönme hareketi olur. Biz bu harekete DAİRESEL HAREKET ismini veririz.

3.5.1 Düzgün Dairesel Hareket

Bir parçacığın bir çember ekseni üzerinde **sabit süratle** hareketine düzgün dairesel hareket denir. Örnek olarak sabit süratle sabit yarıçaplı bir viraja giren otomobili, dairesel yörünge izleyen bir uyduyu verebiliriz.

Bu tip harekette

- İvmenin hareket yönüne parallel (teğetsel) bir bileşeni yoktur. Bu yüzden sürat sabit kalır.

- İvme vektörü dairesel yola dik (normal) doğrultuda daima içeri yöne dönüktür. Bu sayede hız vektörünün şiddeti değişmeden yönü değişir.

Sabit süratle ve merkezi O olan R yarıçaplı bir daire üzerinde hareket eden parçacık $\triangle t$ zamanında P_1 noktasından P_2 noktasına $\vec{v}(t_1)$ ve $\vec{v}(t_2)$ hız vektörleriyle hareket etsin. $\triangle t$ süresi boyunca sürati değişmeden $\triangle\phi$ açısı kadar ilerlediğini düşünelim. Merkezi, yarıçapı ve konum noktlarıyla oluşan eşkenar üçgen geometrik olarak süratleri eş $|\vec{v}(t_1)| = |\vec{v}(t_1)| = v$ ve hız vektörlerinin farklı olan $\triangle\vec{v} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_2)$ ile benzerdir. Benzer üçgenlerin birbirlerine denk kenarları oranlanırsa

$$\begin{aligned} \frac{|\triangle\vec{v}|}{v} &= \frac{|\triangle\vec{r}|}{R} \\ |\triangle\vec{v}| &= v\frac{|\triangle\vec{r}|}{R} \end{aligned}$$

Ortalama ve anlık ivme ifadeleri ise

$$\begin{aligned} |\vec{a}_{ort}| &= \frac{|\triangle\vec{v}|}{\triangle t} \\ &= \frac{v}{R}\frac{|\triangle\vec{r}|}{\triangle t} \\ |\vec{a}| &= \lim_{\triangle t\to 0}\frac{v}{R}\frac{|\triangle\vec{r}|}{\triangle t} \\ &= \frac{v}{R}\lim_{\triangle t\to 0}\frac{|\triangle\vec{r}|}{\triangle t} \\ &= \frac{v^2}{R} \end{aligned} \tag{3.22}$$

Burada kullanılan v herhangi bir andaki sürattir ve yol boyunca hep sabittir. Bu ivme **RADYAL İVME** olarak da isimlendirilir çünkü her noktada yarıçap doğrultusunda ve merkeze doğrudur. Bazı yerlerde bu ivmeye merkezcil ivme de denir.

Düzgün dairesel harekette parçacık bir çember turu olan $2\pi R$ lik mesafeyi T sürede tamamlar.

$$\begin{aligned} v &= \frac{2\pi R}{T} \\ |\vec{a}|_{rad} &= \frac{v^2}{R} \\ &= \frac{4\pi^2 R}{T}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Ev ödevi 11. *Yanal ivme, arabanın yoldan kaymadan yapabileceği en büyük merkezcil ivmedir. Bir arabanın yanal ivmesi* $0,96(9,8m/s^2)$*'dir. Araba sabit* $144km/sa$ *süratle giderken alabileceği en keskin virajın yarıçapı nedir?*

Ev ödevi 12. *Atlıkarıncaya binenler sabit süratle yarıçapı* $5,0m$ *olan bir daire üzerinde hareket ederek bir turu* $4,0s$*'de tamamlıyorlarsa radyal ivmeleri nedir?*

3.5.2 Düzgün Olmayan Dairesel Hareket

Parçacığın hareketi sırasınra teğet ivmesi de varsa sürati değişiklik gösterecektir. Böylelikle radyal yöndeki hareketin yanında sürüklenme hareketi de olur. Bu tip harekete düzgün olmayan dairesel hareket ismi verilebilinir.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}_{rad} + \vec{a}_{par} \\ |\vec{a}_{rad}| &= \frac{v^2}{R} \\ |\vec{a}_{par}| &= \frac{d}{dt}|\vec{v}| \\ |\vec{a}| &= \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \sqrt{|\vec{a}_{rad}|^2 + |\vec{a}_{par}|^2}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

3.6 Bağıl Hız

Yavaş giden bir trenin yanından geçerken sanki trenin geri geri hareket ettiğini hissederiz. Bunu hissetmemiz için başka bir referans sistemimi görmememiz gerekir. Gerçekte belirli bir gözlemcinin gördüğü hız, CİSMİN O GÖZLEMCİYE GÖRE HIZIDIR. Buna **Bağıl Hız** denir.

3.6.1 Bir Boyutta Bağıl Hız

Bir yolcu $3,0(m/s)$ hızla ileriye doğru giden bir trenin orta koridorunda $1,0(m/s)$ hızla ileriye doğru ilerlemektedir. Yayayın hızı nedir?

- Bu sorunun tek bir cevabı yok!
- Trende oturan adama göre yaya $1,0(m/s)$ hızla ileriye doğru ilerlemektedir.
- Trenin dışında evinin balkonundan izleyen kadına göre $4,0(m/s)$ veya $2,0(m/s)$ hızla ilerlemektedir.
- Karşı yönden gelen trenin içindeki adam yolcuyu farklı hızlarda görür.

Sonuç: Her GÖZLEM ÇERÇEVESİNDE FARKLI GÖZLEMLER OLDU.

İlkesel olarak elinde bir kronometre ve cetvel bulunduran her gözlemci bir GÖZLEM ÇERÇEVESİ OLUŞTURUR. Yeryüzüne göre sabit olan balkondaki kadının çerçevesine A; Trenin içinde oturan adamın gözlem çerçevesine B çerçeveleri diyelim.

Tanım: Bir P noktasının A çerçevesine göre konumunu $x_{P/A}$; B çerçevesine göre konumunu $x_{P/B}$ ile göstereceğiz. B çerçevesinin başlangıç noktasının A çerçevesine göre konumunu $x_{B/A}$ ile gösterilirse

$$
\begin{aligned}
x_{P/A} &= x_{P/B} + x_{B/A}; && (3.25)\\
\frac{dx_{P/A}}{dt} &= \frac{dx_{P/B}}{dt} + \frac{dx_{B/A}}{dt} \\
v_{P/A-x} &= v_{P/B-x} + v_{B/A-x}. && (3.26)
\end{aligned}
$$

Tren örneğine geri dönelim. $v_{P/B-x} = 1,0(m/s)$; $v_{B/A-x} = 3,0(m/s)$. O halde $v_{P/A-x} = v_{P/B-x} + v_{B/A-x} = 4,0(m/s)$. Bu sonuç yolcunun kadına göre bağıl hızıdır.

Yolcu trende ileri değilde geriye doğru yürüyor olsaydı, neler değişirdi?

- $v_{P/B-x} = -1,0(m/s)$; $v_{B/A-x} = 3,0(m/s)$ ve $v_{P/A-x} = v_{P/B-x} + v_{B/A-x} = 2,0(m/s)$

Yolcu pencereden dışarıya bakarsa kadını nasıl görür? $\mathbf{v_{P/A-x}} = -\mathbf{v_{A/P-x}}$!!!
DIKKAT: GÖZLENEN/ GÖZLEMCI

Örnek 23. *İki şeritli düz bir yolda kuzeye doğru* $88(km/saat)$ *hızla giderken, karşı şeritten* $104(km/saat)$ *hızla bir kamyon geliyor.*

- *Kamyonun sana göre bağıl hızı nedir?*
- *Senin kamyona göre bağıl hızı nedir?*
- *Kamyonla yan yana geçtikten sonra bağıl hız nasıl değişir?*
  - *Kamyonun dünyaya göre bağıl hızı* $v_{K/D-x} = -104(km/saat)$
  - *Senin dünyaya göre bağıl hızı* $v_{S/D-x} = 88(km/saat)$
  - $v_{K/D-x} = v_{K/S-x} + v_{S/D-x}$ *olduğundan*

$$
\begin{aligned}
v_{K/S-x} &= v_{K/D-x} - v_{S/D-x} \\
&= -104(km/saat) - 88(km/saat) \\
&= -192(km/saat).
\end{aligned}
$$

- *Senin kamyona göre hızın* $v_{S/K-x} = -v_{K/S-x} = 192(km/saat)$.
- *Yan yana geçtiksen SONRA bağıl hız DEĞİŞMEZ. Yani bağıl hız araçların konumundan etkilenmez.*

3.6.2 İki ve Üç Boyutta Bağıl Hız

Bir boyutta yaptığımızı üç boyuta genelleştireceğiz.

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_{P/A} &= \vec{r}_{P/B} + \vec{r}_{B/A}; && (3.27)\\
\frac{d\vec{r}_{P/A}}{dt} &= \frac{d\vec{r}_{P/B}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt} \\
\vec{v}_{P/A-x} &= \vec{v}_{P/B-x} + \vec{v}_{B/A-x}. && (3.28)
\end{aligned}
$$

3-boyutta olduğumuz için dikkatli olmalıyız. Diyelim ki tren içindeki yolcu treninin hareket yönüne dik yürüyorsa, o halde bağıl hızı alırken

$$\begin{aligned}
|\vec{v}_{P/A}| &= \sqrt{|\vec{v}_{B/A}|^2 + |\vec{v}_{P/B}|^2} \\
&= \sqrt{(3(m/s))^2 + (1(m/s))^2} \\
&= 3,2(m/s). \\
\tan\theta &= \frac{|\vec{v}_{P/B}|}{|\vec{v}_{B/A}|} \\
\theta &= 18.
\end{aligned}$$

Örnek 24. *Bir uçak pusulasında uçağın konumu kuzeye dönük görünürken hız göstergesi (havaya göre)* $240(km/saat)$ *göstermektedir. Bölgede batıdan doğuya doğru* $100(km/saat)$ *esen bir rüzgar var ise uçağın yere göre hızı nedir?*

Önce koordinatları belirleyelim. Doğuyu pozitif-x yönü, kuzeyi de pozitif-y yönü kabul edelim.

- *Uçağın havaya göre hızı* $\vec{v}_{U/H} = 240(km/saat)\hat{j}$.
- *Havanın yere göre hızı* $\vec{v}_{H/Y} = 100(km/saat)\hat{i}$.
- *Uçağın yere göre hızı* $\vec{v}_{U/Y}$ *diye tanımlarsak*

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{U/Y} &= 100(km/saat)\hat{i} + 240(km/saat)\hat{j} \\
|\vec{v}_{U/Y}| &= \sqrt{(100(km/saat))^2 + (240(km/saat))^2} \\
&= 260(km/saat). \\
\tan\theta &= \frac{|\vec{v}_{U/Y}|}{|\vec{v}_{U/H}|} = \frac{5}{12}.
\end{aligned}$$

Açı olarak 23 *derece çıkıyor.*

Ev ödevi 13. *Yukarıdaki örneğe ek olarak şunu yapınız. Uçağın pilotu uçağı rüzgara rağmen TAM OLARAK KUZEYE yöneltmek için uçağın yönünü nereye çevirmelidir. Bu halde uçağın dünyaya göre hızı ne olacaktır?*

3.7 ÖDEV SET 3

1. Bir parçacığın $t = 0$ anında ilk hızı $\vec{v} = (5m/s)\hat{i} + (2m/s)\hat{k}$, ivmesi ise $\vec{a} = (-2m/s^2)\hat{i}$ ile verilmektedir.

   (a) 3-boyutta parçacığın hareketini yorumlayınız.

   (b) $t = 2sn$ anı için parçacığın hız vektörünü yazınız.

   (c) $t = 0$ anında parçacığın konum vektörü $\vec{r}(t = 0) = (2m)\hat{i} + (2m)\hat{k}$ ise $t = 2sn$ anındaki konum vektörünü belirleyiniz.

2. Yerden $200m$ yüksekte ve yatay doğultuda $v_0 = 200m/s$ hızla uçan bir uçağın pilotu, $d = 2400m$ yatay uzakta bir helikopterin $a = 1m/s^2$ lik bir ivme ile yerden dikey doğrultuda havalandığını görüyor. Pilot helikopteri vurmak için bomba bırakmak istiyor. Bunun için helikopteri fark ettikten kaç saniye sonra bombasını bırakmalıdır?

3. 2-boyutta bir parçacık $y = x^2$ eğrisi üzerinde hareket ediyor. Bu parçacığın sürati sabit ve $|\vec{v}| = u$ ile verilmiş olsun. Parçacık

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}.$$

   konumundayken

   (a) Hız vektörünün yazınız.

   (b) Hız vektörünün bileşenlerinin oranını $\frac{v_y}{v_x}$ x'in fonksiyonu olarak ifade ediniz.

   (c) Hız vektörünün bileşenlerini v_x, v_y; (u, x)'in bir fonksiyonu olarak ifade ediniz.

4. $t = 0$ anında, iki kişi $\vec{r} = 0$ konumunda yan yanadırlar. Birinci kişi $\vec{v}_1 = u\hat{i}$ hızıyla ivmesiz bir hareket etmektedir. İkinci kişi ise $\vec{v}_2 = 3u\hat{i}$ hızıyla ve $\vec{a}_2 = -c\hat{i}$ sabit imesi ile hareket etmektedir. $u > 0, c > 0$ olmak üzere

   (a) Hangi t anında bu iki kişi tekrar biraraya gelirler?

   (b) Tekrar biraraya geldiklerinde ikinci kişinin hızını u, c cinsinden ifade ediniz.

   (c) Hangi süre içinde ikinci kişi başlangıç noktasına geri döner, zamanı u, c cinsinden ifade ediniz.

   (d) Aynı soruyu şöyle soralım, Birinci kişi başlangıç anında $d > 0$ olmak üzere $\vec{r} = d\hat{i}$ konumunda olsun. Bu iki kişinin bir daha hiç biraraya *gelememesi* için gerekli olan c nin asgari değerini u, d cinsinden ifade ediniz.

Chapter 4

NEWTON'UN HAREKET YASALARI

Şimdiye kadar mekaniğin kinetik kısmı **kinematiği** yani hareketin nasıl olduğunu gördük. Bu bölümle birlikte hareketin nedenini yani **dinamiği** çalışacağız.

Dinamik için iki önemli fiziksel nicelik **kuvvet** ve **kütle**'dir.

Newton, 1867 yılında yayınladığı **Doğal Felsefenin Matematiksel İlkeleri** isimli kitabında dinamik ilkelerini üç ana başlık altında toplamıştır. Bu yasaların matematiksel olarak türetilmediğini, gözlemlere dayanan TEMEL yasalar olduğunu vurgulamalıyız.

- **1. Yasa:** Bir cisim üzerine etkiyen net kuvvet sıfırsa, cismin hareketi değişmez.
- **2. Yasa:** Net kuvvet sıfır değilse, kuvvet ile ivme ilişkilenir.
- **3. Yasa:** Birbiriyle etkileşen kuvvetlerin birbirlerine uyguladıkları kuvvetler arasında bir ilişki vardır.

4.1 Kuvvet ve Etkileşimler

Günlük dilde **kuvvet** *itme* ve *çekme*'dir. Biraz daha iyi bir tanım vermek istersek kuvveti *İki cismin veya bir cismin çevresi ile etkileşimidir.*

Kuvvet doğrudan bir teması içeriyorsa, **değme kuvveti** ismini alır. Değme kuvvetinin üç çeşittir:

- **Normal kuvvet:** Bir cisme üzerinde bulunduğu yüzey tarafından uygulanır.
- **Sürtünme kuvveti:** Yüzeye paralel doğrultuda her zaman harekete ters yöndedir.
- **Gerilim kuvveti:** Gergin bir ip, tel vb. yardımıyla çekme kuvvetidir.

Değme kuvvetinden başka, aralarında boşlukta olsa cisimlerin etkileşmesini sağlayan *uzun menzilli kuvvetler*'de vardır. Bunlardan ilk aklımıza gelebilecekler **Yerçekim kuvveti, elektromanyetik kuvvet, yeğin kuvvet, zayıf kuvvet**.

Vektörel bir fiziksel niceliktir olan kuvveti $\vec{F}$ ile gösteririz, birimi ise "mks" sisteminde $Newton$'dur. Tipik bazı kuvvetlerin şiddetleri :

- Dünya ile güneş arasındaki yerçekim kuvvetinin şiddeti: $3,5 \times 10^{22} N$
- Uzay mekiği fırlatılırken yapılan itme kuvvetinin şiddeti: $3,1 \times 10^{7} N$
- Büyük bir mavi balinanın ağırlığının şiddeti $1,9 \times 10^{6} N$
- $110kg$ kütleli bir sporcunun ağırlığının şiddeti $1,1 \times 10^{3} N$
- Ortaboy bir elmanın ağırlığının şiddeti $1,0N$
- Bir elektronun ağırlığının şiddeti $8,9 \times 10^{-30} N$
- Hidrojen atomunun proton ve elektronu arasındaki çekim kuvvetinin şiddeti $3,6 \times 10^{-47} N$

4.1.1 Kuvvetlerin Üst Üste Binmesi

Kuvetler vektörel nicelikler olduğundan, kuvvetlerin toplamı vektörlerin toplamı gibi yapılır. Birinci bölümde yaptıklarımızı tekrarlamak isteyebilirsiniz!

Örnek 25. *Üç kişi bir cisme sahip olabilmek için cisme aynı anda kuvvetler uyguluyor. Birinci kişi* $250N$ *şiddetinde pozitif x ekseni ile* 127 *derece yapan bir kuvveti, İkinci kişi* $50N$ *şiddetinde pozitif x ekseni yönünde bir kuvveti, son kişi ise* $120N$ *şiddetinde pozitif x ekseni ile* 270 *derece yapan kuvveti uyguluyor. Bütün bu kuvvetler karşısında bozulmadan duran bu cisim, kendi üzerinde hangi kuvvet vektörünü hisseder?*

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= 250(N)\cos(127)\hat{i} + 250(N)\sin(127)\hat{j} \\
&= -150(N)\hat{i} + 200(N)\hat{j} \\
\vec{F}_2 &= 50(N)\cos(0)\hat{i} + 50(N)\sin(0)\hat{j} \\
&= 50(N)\hat{i} \\
\vec{F}_3 &= 120(N)\cos(270)\hat{i} + 120(N)\sin(270)\hat{j} \\
&= -120(N)\hat{j} \\
\vec{F}_{net} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \\
&= -100(N)\hat{i} + 80(N)\hat{j}.
\end{aligned}$$

Kuvvetin şiddetini sorsaydı $|\vec{F}_{net}| = 123N$ *cevabı verilecekti. Ayrıca yönü de sorulabilir. O zaman da* $\tan\theta = \frac{80N}{-100N} = -4/5$ *cevabı verilecekti.*

4.2 Newton'un Birinci Yasası

Bir cisim durağan ise ve üzerine net bir kuvvet etki etmiyorsa, durağan kalmaya devam eder. Peki hareket halinde bir cisim olsaydı ne olurdu?

Hiç birşey olmaz! Hareketine aynen devam ederdi.

1. YASA: Üzerine net kuvvet uygulanmayan bir cisim sabit hızla ve sıfır ivme ile hareket eder.

EYLEMSİZLİK: Bir cisim harekete başladığında, hareketi sürdürme eylemine EYLEMSİZLİK denir.

Cisim eğer duruyorsa, ya da sabit hızla hareket ediyorsa cisim DENGE'dedir. Üzerine etkiyen net kuvvet sıfırdır.

$$\sum_{i=1} \vec{F_i} = 0 \tag{4.1}$$

Bileşenler cinsinden ise aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1} F_{x_i} &= 0 \\ \sum_{i=1} F_{y_i} &= 0 \\ \sum_{i=1} F_{z_i} &= 0. \end{aligned}$$

4.2.1 Eylemsiz Referans Sistemleri

Otobüste paten üstünde dururken, otobüs hareket ederse geriye doğru, otobüs fren yapınca da ileriye doğru hareket ederiz. Oysa otobüsün içinde üzerimize etkiyen net bir kuvvet yoktur. Peki neden hızımız değişiyor?

Newton'un 1.Yasası her referans sisteminde geçerli değil mi? Evet, herzaman geçerli değildir. Otobüs dünyaya göre ivmelendiğinden Newton'un birinci yasası geçerli değildir.

Newton'un 1.Yasasının geçerli olduğu Referans Sistemlerine **Eylemsiz Referans Sistemleri** denir. Bu referans sistemleri, diğer referans sistemlerine göre ivmesiz hareket etmelidirler.

Dünya her ne kadar kendi ekseni etrafında döner ve bir yörüngede hareket ederse bile her zaman bu hareketlerini hissetmeyiz ve ihmal edebiliriz. O halde DÜNYA HER ZAMAN BİR EYLEMSİZ REFERANS SİSTEMİDİR.

Otobüs örneğine dönersek, paten üzerinde dururken, hiçbir net kuvvete maruz kalmayız ve dünya eylemsiz referans sistemine göre yerinde kalma eğilimindedir. Otobüsün hızı artıkça paten ile aynı yerde kalma isteğimizden dolayı geriye doğru kaymaya başlarız.

- Newtonun Eylemsiz Referans Sistemi sadece bir tane midir?

Birden fazla eylemsiz referans sistemi vardır. Yeter ve gerek koşul, seçilen yeni referans sisteminin sabit hızla hareket etmesidir. Diyelim ki bir A referans sitemine göre sabit $\vec{v}_{B/A}$ hızla hareket eden B referans sistemi olsun. A referans sistemi eylemsiz bir sistemse B referans sistemi de eylemsiz referans sistemidir.

Bir P noktasını A eylemsiz referans sisteminde hızını ölçelim ve $\vec{v}_{P/A}$ bulalım. Aynı noktanın B eylemsiz referans sisteminde hızını ölçersek $\vec{v}_{P/B}$ bulalım. Bu iki ölçüm arasında

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A}$$

A ve B'de bulunan gözlemciler hızları farklı gözlemliyorlar.

$$\vec{v}_{P/B} = \vec{v}_{P/A} - \vec{v}_{B/A}$$

Fakat iki gözlemci de aynı ivmeyi ölçemelilerdir. Yukarıda verilen hız ifadenin zaman türevini alırsak bunu açıkça görebiliriz. Eğer referans sistemleri birbirine göre ivmelenseydi, aynı ivmeler çıkmazdır dolayısıyla evrensel fizik yasalarına ulaşamazdık.

4.3 Newton'un İkinci Yasası

Bir cisme etkiyen net kuvvet, cismin aynı yönde ivmelenmesine neden olur. Bir başka ifade ile cismin ivmesinin şiddeti, etkiyen kuvvetin şiddetiyle doğru orantılıdır.

$$m = \frac{|\sum_{i=1} \vec{F}_i|}{|\vec{a}|}$$

Bu orana m ismi verilir bazen **Eylemsiz kütle** bazen de sadece **kütle** olarak dillendirilir. MKS birim sisteminde kütlenin birimi **kg** olarak alınır. Kuvvetinin birimine ise **Newton** denir. O halde ivmenin birimi ile beraber

$$N = kg\frac{m}{s^2}$$

2. Yasa: Bir cisme net bir dış kuvvet etki ederse cisim ivmelenir. İvmenin yönü net kuvvet yönüdür.

$$\sum_{i=1} \vec{F}_i = m\vec{a}(t)$$

Bileşenler cinsinden aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1} F_{x_i} &= ma_x \\ \sum_{i=1} F_{y_i} &= ma_y \\ \sum_{i=1} F_{z_i} &= ma_z.\end{aligned}$$

Bütün bu ifadeler m kütlesinin zaman içinde sabit olduğu durumlarda geçerlidir. Newton'un ikinci yasasını ileride daha düzgün ve genel olarak ifade edeceğiz.

Örnek 26. *Garson elindeki $m = 0,45kg$ kütleli bir şişeyi düzgün bir yemek masası üzerinde sağa doğru ittiriyor. Garsonun elinden şişe $2,8(m/s)$ süratle çıkıyor ve sabit sürtünme kuvveti nedeniyle yavaşlıyor. Şişe durana kadar $1(m)$ yol alıyor. Sürtünme kuvvetinin yönü ve şiddeti nedir?*

Tek yönlü bir hareket olduğunu düşünelim. Sağ yönünü pozitif olarak kabul edersek, başlangıç hızı $\vec{v}_{0x} = 2,8(m/s)\hat{i}$ son hızı ise sıfıdır. O halde ivmeyi

$$\begin{aligned}[v_x(t)]^2 &= [v_{0x}]^2 + 2[x_2(t) - x_1(0)]|\vec{a}_{ort-x}(t)| \\ 0 &= (2,8m/s)^2 + 2(1m)|\vec{a}_{ort-x}(t)| \\ |\vec{a}_{ort-x}(t)| &= -3,9(m/s^2)\end{aligned}$$

Net kuvvet sadece sürtünme kuvvetine eşittir. O halde sürtünme kuvveti

$$\begin{aligned}\vec{f}_s &= m\vec{a} \\ &= 0,45(kg)(-3,9m/s^2)\hat{i}\end{aligned}$$

4.4 Kütle ve Ağırlık

Kütle ve **Ağırlık** birbiriyle sıklıkla karıştırılan iki fiziksel niceliktir. Kütle, *SKALER* bir nicelikken, Ağırlık *VEKTÖREL* bir niceliktir. Ağırlık kütle ile yerçekim ivmesinin çarpılması sonucu elde edilir. Kütle evrende her zaman aynı ölçülürken yerçekim ivmesi dolayısıyla ağırlık her yerde farklılık gösterir.

Ev ödevi 14. *Pozitif-x doğrultusunda ilerleyen bir araba $2,49 \times 10^4 N$'luk sert bir fren yapar. Bu esnada üzerine etkiyen net kuvvetlerin x bileşeni $-1,83 \times 10^4 N$'dur. İvmesini bulunuz. Cevap $-7,20(m/s^2)\hat{i}$.*

4.5 Newton'un 3. Yasası

3. Yasa: Bir A cismi B cismine bir kuvvet uyguladığında (etki kuvveti) B cismi de A cismine bir kuvvet uygular (tepki kuvveti).

Bu kuvvetlerin şiddeti aynıdır fakat zıt vektörlerdir.

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$

4.6 Serbest Cisim Diyagramı(SCD)

Serbest cisim diyagramları, cismi çerçevesinden bağımsız olarak noktasal yapıda düşünüp, üzerine uygulanan kuvvetlerin yön ve büyüklüklerini göstermek üzere çizilen vektörlerden oluşan diyagramdır.

Ev ödevi 15. *Başlama bloğundaki koşucunun ayağının SCD'nı çiziniz.*

Ev ödevi 16. *Bir yüzücünün SCD'nı çiziniz.*

4.7 ÖDEV SET 4

1. Bir hızlı tren, iki istasyon arasında, ortalama $216km/saat$ hız yapabilmektedir.

   (a) Tren bu hız ile viraja girer. Herhangi bir yolcunun dayanabileceği maksimum ivme, g yerçekim ivmesi olmak üzere, $0,05g$ ise bu şartlar altında virajın kabul edilebilir en küçük yarıçapı ne olmalıdır?

   (b) Trenin önünde $1,0km$ yarıçaplı bir viraj var ise, bu virajı geçmek için trenin sürati hangi sürate düşürülmelidir?

2. Nötron yıldızlarının $1devir/s$ sabit frekans ile döndüklerine inanılır. Böyle bir yıldızın yarıçapı ise hesaplara göre $20km$'dir. Bu yıldızın ekvatoru üzerindeki bir cismin merkezcil ivmesi nedir?

3. Bir duvar saatinin saniyesini gösteren metalin açısal hızının büyüklüğü nedir? Bu metalin açısal ivmesinin büyüklüğü nedir?

4. Güneşin etrafını 365 gün 4 saatte dönen dünyanın açısal hızının şiddetini bulunuz. (yörüngenin çember olduğunu kabul edelim.)

5. Bir helikopter, $9,5m$ sabit yükseklikte, $6,2m/s$'lik sabit bir hızla bir doğru boyunca uçuyor. Helikoptere göre ilk hızı $12m/s$ olan bir cisim yatay olarak helikopterin hareketine ters yönde atılıyor.

   (a) Cismin yere göre ilk hızı nedir?

   (b) Cismin yere çarparken helikopter ile cisim arasındaki yatay uzaklık nedir?

   (c) Cisim yere çarparken, hız vektörü ile yer arasındaki açı nedir?

6. Bir savaş gemisi doğu yönünde $24km/saat$ hız ile gitmektedir. $4,0km$ uzaklıkta olan bir denizaltı, hızı $50km/saat$ olan torpili savaş gemisini batırmak için atar. Debizaltıya göre savaş gemisinin yeri kuzey doğrultusuna göre 20 derece doğu yönünde ise, Torpilin savaş gemisine çarpması için yönünü bulunuz ve gerekli süreyi hesaplayınız.

7. Kütlesi $72kg$ olan bir itfaiyeci, düşey durumda bir direkten aşağı doğru $3,28m/s^2$'lik bir ortalama ivme ile kayıyor. İtfaiyecinin, düşey olarak, direğe uyguladığı ortalama kuvvet nedir?

8. $100kg$'lık bir adam, sürtünmesiz bir makaradan geçen ve bir ucu $70kg$'lık bir kum torbasına bağlı bir halata tutunarak yerden $10m$ yükseklikte bulunan bir noktadan kendisini aşağıya bırakıyor. Adamın yere çarpma anındaki hızı nedir? Adamın yere çarpma hızını azaltabilmesi için yapabileceği birşey var mıdır?

Chapter 5

Newton Yasalarının Uygulamaları

Newton'un birinci yasası "Eylemsiz referans sistemlerinde bir cisme net kuvvet etki etmiyorsa cisim hareketini veya durağanlığını aynen devam ettirir."

Newton'un ikinci yasası "Sabit kütleli bir cisme etki eden kuvvetlerin toplamı sıfırdan farklı ise, cisme net kuvvet yönünde bir ivme etkir."

Newton'un üçüncü yasası "Bir cisim diğer cisime bir etki kuvveti uyguladığında, diğer cisim de kendisine bir tepki kuvveti uygular. Bu iki vektör zıt vektörlerdir."

5.1 İvmesiz Hareketlerdeki Uygulamalar

Örnek 27. *Kütlesi $m = 50kg$ olan bir sporcu kendisini tavana ağırlığı ihmal edilebilen bir halatla bağlıyor ve hareketsiz dengede kalıyor.*

1. *Sporcunun ve halatın ayrı ayrı Serbest Cisim Diyagramlarını (SCD) çizin.*
2. *Sporcunun ağırlığı nedir?*
3. *Halatın sporcuya uyguladığı kuvvet nedir?*
4. *Halatın üst kısmındaki gerilme kuvveti nedir?*

Örnek 28. *Kütlesi $m = 50kg$ olan bir sporcu kendisini tavana ağırlığı ihmal edilemiyen ve ağırlığının şiddeti $120N$ olan bir halatla bağlıyor ve hareketsiz dengede kalıyor.*

1. *Sporcunun ve halatın ayrı ayrı Serbest Cisim Diyagramlarını (SCD) çizin.*
2. *Sporcunun ağırlığı nedir?*
3. *Halatın sporcuya uyguladığı kuvvet nedir?*

4. *Halatın üst kısmındaki gerilme kuvveti nedir?*

Örnek 29. *Ağırlığının şiddeti W olan bir motor bir zincirle dikey olarak bir halkaya bağlanmıştır. Kütlesi ihmal edilebilen halka yine bir yatay zincirle duvara birde yatayla α açısı yapan diğer bir zincirle çatıya tavana bağlanmıştır. Sistemde kullanılan tüm zincirlerin kütleleri ihmal edilebilecek büyüklükte olsun.*

1. *Motorun ve halkanın ayrı ayrı Serbest Cisim Diyagramlarını (SCD) çizin.*
2. *Her zincirdeki gerilme kuvvetini verilenler cinsinden bulunuz.*
3. *Halkanın ağırlığı ihmal edilemeyecek olsun. SCD diyagramlarını çizerek gerilme kuvvetlerini tekrar bulunuz.*

Örnek 30. *Ağırlığın şiddeti W olan bir araba, bir araba çekicisinin üzerinde yatayla α açısı yapacak şekilde bir halata bağlı şekilde dengede duruyor.*

1. *Arabanın Serbest Cisim Diyagramını (SCD) çizin.*
2. *Halattaki gerilme kuvvetini verilenler cinsinden bulunuz.*
3. *Eğik düzlemin arabanın tekerliğine uyguladığı normal kuvveti bulunuz.*

Örnek 31. *Bir m_1 kütleli bir blok eğik düzlem üzerinde 15 derecelik bir açı ile kütlesi önemsiz bir ip ile bir makara sistemi yardımıyla sadece düşeyde hareket eden m_2 kütleli bir başka bloka bağlıdır. Sistemin sabit süratla hareket edebilmesi için*

1. *Her iki blok için ayrı ayrı Serbest Cisim Diyagramlarını (SCD) çizin.*
2. *Blok kütleleri arasında nasıl bir ilişki olmaldır.*

5.2 İvmeli Hareketlerdeki Uygulamalar

Örnek 32. *Bir buz yelkenlisi tamamen sürtünmesiz bir yüzeyde hareketsiz halde durmaktadır. Rüzgar kızakların doğrultusunda eser ve yelkenliği tek boyutlu hareket ettirir. $4,0s$ sonra sürati $6,0(m/s)$'ye ulaşmıştır. Yelkenlinin kütlesi $200kg$'dır.*

1. *Yelkenli için Serbest Cisim Diyagramı (SCD) çizin.*
2. *Rüzgarın yelkenliğe etkidiği yatay sabit kuvveti verilenler cinsinden bulunuz.*

Örnek 33. *Yukarıdaki örnek için $100N$ şiddetinde sabit bir sürtünme kuvveti harekete ters yönde etki ediyor olsun.*

1. *Yelkenli için Serbest Cisim Diyagramı (SCD) çizin.*
2. *Yelkenlinin aynı ivmeye ulaşabilmesi için rüzgarın kuvvetini yeniden hesaplayınız.*

Örnek 34. *Bir asansörün kütlesi yüküyle beraber* $800kg$*'dır. Asansör başlangıçta aşağı yönlü* $10(m/s)$ *sabit süratle inerken, son* $25m$*'lik mesafede sabit bir ivmeyle yavaşlayıp durmaktadır.*

1. *Asansör için Serbest Cisim Diyagramı (SCD) çizin.*
2. *Asansörün durmasını sağlayan ivmeyi hesaplayınız.*
3. *Asansör durana kadar asansörü tutan halatta oluşan gerilmeyi hesaplayınız.*

Örnek 35. *Asanörlü örnek için, asansörün içinde kültesi* $50kg$ *olan bir kadın bulunmaktadır. Asansör ivmelenip dururken tartıya çıkan kadın için*

1. *Asansör içindeki kadının Serbest Cisim Diyagramı (SCD) çizin.*
2. *Tartının gösterdiği ağırlık nedir?*

Örnek 36. *Bir kar kızağı tatil yapan bir grup öğrenciyle doludur. Kar kaplı bir tepeden aşağıya doğru sürtünmesiz olarak kaymaktadır. Tepenin eğimi* α*'dır. Kızağın öğrencilerle beraber toplam ağırlığının şiddeti* W*'dir.*

1. *Kızak için Serbest Cisim Diyagramı (SCD) çizin.*
2. *Kızağın ivmesini verilenler cinsinden bulunuz.*

Örnek 37. *Yemek sırasında bekleyen bir öğrenci* $1,00kg$*'lık tepsisini sürtünmesiz yemek masası üzerinde sağa doğru* $9,0N$ *şiddetinde itmektedir. Tepsinin diğer ucu* $0,50kg$*'lık su şisesine dokunmaktadır ve beraber hareket etmektedirler.*

1. *Tepsi ve su şişesinin Serbest Cisim Diyagramlarıni (SCD) çizin.*
2. *Ayrı ayrı çalışarak sistemin ivmesini bulunuz.*
3. *Tepsinin şişeyi itme kuvvetini bulunuz.*
4. *Şişenin tepsiyi itme kuvvetini bulunuz.*
5. *İki cismin beraber bir cisim olduğu durumu düşünerek SCD çiziniz.*
6. *Sistemin ivmesini bulunuz. Doğru olup olmadığını gözlemleyiniz.*

Örnek 38. *Bir laboratuvarda sürtünmesiz bir hava yastığı üzerinde bulunan* m_1 *kütleli cisim, uzamayan esnek ve hafif bir iple masanın yanında düşey doğrultuda hareket edebilen bir* m_2 *kütleli cisme bağlıdır.*

1. *Her iki kütle için Serbest Cisim Diyagramları (SCD) çizin.*
2. *Tüm Newton yasalarını açıkca yazın.*
3. *Sistemin ivmesini verilenler cinsinden bulunuz.*

5.3 Sürtünme Kuvvetleri

Bir cisim, bir yüzey üzerinde duruyor veya kayıyorsa, bir "değme" kuvvetiyle karşı karşıyadır. Bu kuvvetler yüzeye dik olan "Normal" kuvvet ile yüzeye paralel ve her zaman harekete ters yönde olan "Sürtünme" kuvvetleridir. Sürtünme kuvvetini iki farklı durum için inceleyebiliriz. **Statik ve Kinetik sürtünme.**

5.3.1 Statik sürtünme

Sürtünme yüzeylerin iç içe geçmesi ile oluşur. Durgun bir cismi hareket ettirene kadar aşmanız gereken bu engele statik sürtünme denir. Yüzeye bağlı olan statik sürtünme katsayısı μ_s ile gösterilir ve statik sürtünme kuvveti $\vec{n}$ normal kuvvet olmak üzere sürtünme kuvvetinin şiddeti

$$|\vec{f_s}| = \mu_s|\vec{n}|$$

ile tanımlanır. Uygulanan net kuvvet hareket yokken her zaman net statik sürtünme kuvvetinin şiddetine eşittir. Şöyle düşünelim, yatay bir kuvvet uygularak bir sandığı kaydırmak istiyoruz. İlk ittiğimiz zaman kuvvetimiz al geldiğini anlıyarak zaman içinde sürekli kuvvetimizi arttıyoruz. Her an için uyguladığımız kuvvete zıt bir statik sürtünme kuvveti vardır. Eğer bu statik kuvvet süreki sabit olsaydı ters yönde net bir kuvvet oluşması gerekir ve harekete sebebiyet verirdi. İttik ittik en sonunda bir kuvvette harekete başlattık diyelim, işte o an statik sürtünme kuvveti maksimum değere ulaşmıştır. Harekete başladığı andan itibaren daha az şiddetli bir kuvvetle harekete devam edebiliriz. Artık Kinetik sürtünme ile karşı karşıya oluruz.

5.3.2 Kinetik sürtünme

Hareket başladığı andan itibaren sürtünme katsayısı azalır ve ismi kinetik sürtünme katsayısı olarak değişir. μ_k ile gösterilir. Cisim hareketli iken kinetik sürtünme kuvvetine maruz kalır. Kinetik sürtünme kuvvetinin şiddeti

$$|\vec{f_k}| = \mu_k|\vec{n}|$$

ile tanımlıdır.

Örnek 39. *Düzgün bir yüzeyde* $500N$ *ağırlık şiddeti olan bir kasayı bir halat ile yatay yönde çekerek hareket ettirmek istiyoruz. Hareketi başlatabilmek için* $230N$ *şiddetinde bir kuvvet uygulamamız gerekiyor. Kasa hareket ettiğinde ise sabit hızla hareket ettirmek için* $200N$ *şiddetinde bir kuvvet yeterli oluyor.*

1. *Kasanın Serbest Cisim Diyagramı (SCD) çizin.*
2. *Statik ve Kinetik sürtünme katsayılarını hesaplayınız.*

Örnek 40. *Az önceki örnek için halatı yatay ile pozitif* 30 *derecelik bir açı ile çektiğmizi düşünelim.*

1. *Kasanın Serbest Cisim Diyagramı (SCD) çizin.*
2. *Kinetik sürtünme katsayısını* $0,40$ *alarak sabit hızda hareket için uygulamamız gereken kuvveti ve şiddetini bulunuz.*

Örnek 41. *Örnek 36'da kızakla kayan öğrenciler vardı. Kızağın SCD ını çizin ve kaydıkları yüzeyde sabit hızda hareket etmeleri için gerekli olan kinetik sürtünme katsayısını verilenler cinsinden bulunuz.*

Örnek 42. *Örnek 41 için sabit hızda hareket değilde ivmeli bir hareket olsun. Öncelikle SCD çizerek ve Newton yasalarını uygulayarak kızağın ivmesini verilenler cinsinden yazınız.*

5.3.3 Yuvarlanma Sürtünmesi

Yuvarlak cisimleri hareket ettirmek aynı kütleli prizma cisimleri hareket ettirmekten daha kolaydır. Bunun için yuvarlanma sürtünme sabiti olan μ_y tanımlayalım. Sürtünme kuvvetinin şidetti

$$|\vec{f_s}| = \mu_y |\vec{n}|$$

olarak tanımlanır.

5.3.4 Akışkan Sürtünmesi

Hava bir akışkandır. Her akışkan için bir sürtünmeden bahsedebiliriz. Bu sürtünme kuvvetleri sürate veya süratin karesi ile doğru orantılıdır. k bir sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} |\vec{f_s}| &= k|\vec{v}| \quad \text{düşük hızlarda} \\ |\vec{f_s}| &= k|\vec{v}|^2 \quad \text{yüksek hızlarda} \end{aligned}$$

5.3.5 Limit Hız

Bir taş parçasını falezlerden denize serbest bırakırsak, düşük hızda bir sürtünme kuvvetini de göz önüne alarak taşın SCD'si bize

$$\begin{aligned} mg - kv_y &= ma_y. \\ mg - kv_y &= m\frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_y}{mg - kv_y} &= \frac{dt}{m} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Harekete başlanılan ilk an içinde sürtünme yoktur. Çünkü sürtünme sürat ile birlikte artacaktır. **Cisim ivmelendikçe sürtünme kuvvetinin şiddeti artacak ama belirli bir andan sonra ivme sıfırlanacaktır.** İşte o an geldiğinde hız artışı artık olmaycaktır. Dolayısıyla süratimiz bir **Limit Hız**'a ulaşmış olacaktır. Bunu v_L ile gösterelim.

$$\begin{aligned} mg - kv_L &= 0. \\ \Rightarrow mg &= kv_L \end{aligned}$$

Buradan elde ettiğimi ifadeyi adi diferansiyel denklem (5.1) 'e yerleştirirsek,

$$\begin{aligned} \frac{dv_y}{mg - kv_y} &= \frac{dt}{m} \\ \frac{dv_y}{kv_L - kv_y} &= \frac{dt}{m} \\ \int_0^v \frac{dv_y}{v_L - v_y} &= \int_0^t \frac{k}{m} dt \\ -\ln(v_L - v_y)\Big|_0^{v(t)} &= \frac{k}{m} t\Big|_0^t \\ \ln \frac{(v(t) - v_L)}{v_L} &= -\frac{k}{m} t \\ \frac{(v(t) - v_L)}{v_L} &= \exp\left(-\frac{k}{m} t\right) \\ v(t) &= v_L\Big[1 - \exp\left(-\frac{k}{m} t\right)\Big] \end{aligned}$$

Süratin zamanla nasıl değişeceğini bulduk.

- İlk sürat $t = 0s$' de $v(0) = 0$ elde ediliyor.
- Zaman ilerledikçe ise $t \to \infty$, sürat $v(\infty) = v_L$ elde ediliyor.

Açıkca gösterdiğimiz gibi ivme sonsuza kadar pozitif bir değer almıyor. Hız belirli bir limit değere ulaşınca ivme de sıfırlanıyor.

Ev ödevi 17. $v(t) = v_L\Big[1 - \exp\left(-\frac{k}{m} t\right)\Big]$ *Limit hız ifadesini kullanarak ivme*
$a_y(t) = v_y \frac{k}{m} \exp\left(-\frac{k}{m} t\right)$
ve konum vektörlerinin şiddetlerini
$y(t) = y_0 + v_L\Big[t - \frac{m}{k}\Big(1 - \exp\left(-\frac{k}{m} t\right)\Big)\Big]$
gibi olduğunu bulunuz.

Örnek 43. *Serbest düşen bir paraşütcüye süratin karesi ile orantılı bir sürtünme kuvveti uygulanır. Bu paraşütcünün limit hızını kütlesi ve diğer sabitler cinsinden bulunuz.*

$$\begin{aligned} mg - (kv^2) &= ma \\ mg - kv_L^2 &= 0 \\ v_L &= \sqrt{\frac{mg}{k}}. \end{aligned}$$

5.4 Düzgün Dairesel Dönme Hareketinin Dinamiği

Belirli bir R yarıçap etrafında sabit süratle hareket eden cismin radyal yönde bir ivmesi olduğunu bulmuştuk.

$$\begin{aligned} |\vec{a}_{rad}| &= \frac{v^2}{R} \\ &= \frac{4\pi^2 R}{T^2} \\ |\vec{F}_{net}| &= m\frac{v^2}{R}. \end{aligned}$$

Örnek 44. *$25kg$ kütleli bir kızak yatay ve sürtünmesiz bir buz tabakası üzerinde durmaktadır. Kızak $5m$ uzunluğunda bir iple buzun içindeki bir direğe bağlıdır. Kızağa bir ilk itme veriliyor ve kızak düzgün dairesel harekete başlıyor. Kızak dakikada 5 dönüş yapabilmektedir. İpin kızağa uyguladığı kuvveti bulunuz. Kızağın ipe uyguladığı kuvvet ile karşılaştırınız.*

Örnek 45. *m kütleli bir cisim L uzunluklu bir ip kullanılarak sarkaç haline getiriliyor. Bu sarkaç sadece bir boyutta ileri ve geri olarak değil, bir çembersel yörünge üzerinde hareket edebiliyor. Sarkacın ipi dikeyle β açısı yaparak sabit v sürati ile döndüğüne göre Bu* ***Konik Sarkaç*** *için*

1. *Sarkacın kütlesinin SCD çiziniz.*
2. *İpteki gerilme kuvvetini verilenler cinsinden bulunuz.*
3. *Peryotu verilenler cinsinden ifade ediniz.*

Örnek 46. *Yarıçapı R olan* ***eğimsiz*** *virajda bir araba dönecektir. Tekerler ile yol arasında statik sürtünme katsayısı μ_s'dir.*

1. *Arabanın SCD çiziniz.*
2. *Arabanın virajda kaymadan dönebileceği en yüksek sürati verilenler cinsinden bulunuz.*

Örnek 47. *Yarıçapı R olan* ***eğimli*** *virajda bir araba dönecektir. Eğimli viraj sürtünme olmasa bile arabanın çembersel yörüngede kalmasını sağlayacaktır.*

1. *Arabanın SCD çiziniz.*
2. *Arabanın virajda v süratiyle ve güvenli olarak dönebilmesi için virajın eğimi β'yı verilenler cinsinden bulunuz.*

Örnek 48. *Dönme dolaptaki bir öğrenci R yarıçaplı düşey dairesel yörüngeli bir hareketi v sürati ile yapmaktadır. Dönme dolap koltuğunun hareket boyunca sürekli dik olduğu varsayılarak,*

1. *Çembersel yörüngenin alt ucu için öğrencinin SCD'sini çizin.*
2. *Çembersel yörüngenin üst ucu için öğrencinin SCD'sini çizin.*
3. *Alt ve üst noktalarda koltuğun yolcuya etkidiği normal kuvvetin şiddetini bulunuz.*

5.5 ÖDEV SET 5

1. Bir asansörün yüküyle birlikte kütlesi $1600kg$'dır. $20m/s$ hız ile aşağıya doğru hareket ederken, asansör $50m$'de sabit bir ivme ile durdurulur. Asansörün bağlı olduğu kablodaki gerilimi ivmeli hareket sırasında bulunuz. $Cevap :\Rightarrow T = 2,2 \times 10^4 N$

2. Bir cisim, asansörün tavanına bağlı yaylı bir kantara asılıdır. Asansör haraketsizken, kantar $267N$ göstermektedir.

   (a) Asansör $7,3m/s$'lik sabit bir hız ile yükselirken, kantar ne gösterir? $Cevap :\Rightarrow T = 267N$

   (b) Asansör $7,3m/s^2$'lik ivme ile aşağı inerken, kantar ne gösterir? $Cevap :\Rightarrow T = 68,1N$

3. Bir blok, v_0 ilk hızı ile eğik düzlemde yukarı doğru sürtünmesiz hareket edecek şekilde fırlatılıyor. Eğim açısı θ'dır.

   (a) Blok eğik düzlem üzerinde ne kadar yol alır?

   (b) Bu yolu ne kadar sürede alır?

   (c) Blok, tekrar geri döndüğümde hızı nedir?

   (d) Bulduğunuz ifadeleri aşağıdaki sayısal ifadeleri yerine koyarak ifade ediniz. $\theta = 30$ ve $v_0 = 2,4m/s$. $Cevap :\Rightarrow x = 0,6m, t = 0,5s$

4. $10kg$'lık bir maymun, bir ağaç dalı üzerinden(sürtünmesiz) geçen ve $15kg$'lık bir kütleye bağlanmış olan halata tırmanıyor.

   (a) Maymun, $15kg$'lık kütleyi kaldırmak için halata nasıl tırmanmalıdır? (yada ne yapmalıdır)

   (b) Maymun kütle yerden kalktığında, tırmanmayı bırakır ve halatı tutar bu durumda ivmesi ne olur?

   (c) Aynı durumda halattaki gerilme kuvveti ne olur? $Cevap :\Rightarrow a_{min} = 0,5m/s^2, a = 0,2g(m/s^2), T = 12g(N)$

5. Bir adam, yatay zemin üzerinde duran kütlesi $35kg$ olan bir bloğu harekete geçirmek için yatay doğrultuda $100N$'luk bir kuvvet uygular.

   (a) Blok ile zemin arasındaki statik sürtünme katsayısı $0,37$ olduğunda, bloğun harekete başlayamayacağını gösterin.

   (b) İkinci bir adam, bloğa düşey doğrultuda yukarı doğru bir kuvvet uygulayarak bloğu harekete başlatır. Bu kuvvetin minumum büyüklüğü ne olmalıdır. $Cevap :\Rightarrow F = 72,7(N)$

   (c) İkinci adam, düşey doğrultu yerine yatay doğrultuda kuvvet uygularsa, bloğun harekete başlaması için bu kuvvetin şiddeti minimum ne olmalıdır? $Cevap :\Rightarrow F = 26,9(N)$

6. $22,2kg$ ağırlığındaki bir bloğu duvarda tutabilmek için $53,4(N)$'luk bir yatay kuvvet uygulanmaktadır. Duvar ile blok arasındaki statik sürtünme katsayısı $0,60$, kinetik sürtünme katsayısı ise $0,40$'dır. Başlangıçta bloğun hareketsiz olduğunu kabul ederek,

   (a) Blok harekete başlar mı?

   (b) Bloğa duvar tarafından uygulanan kuvvet nedir? $Cevap :\Rightarrow \overrightarrow{F} = 53,4\hat{\imath} + 22,2\hat{\jmath}(N)$

7. $110g$'lık bir hokey topu buz üzerinde $15m$ kayarak duruyor.

   (a) Eğer ilk hızı $6m/s$ ise, buz ile top arasındaki sürtünme kuvveti nedir? $Cevap :\Rightarrow f_s = -0,13(N)$

   (b) Kinetik sürtünme katsayısının değeri nedir? $Cevap :\Rightarrow 0,12$

8. Bir piknik sepeti, her $30s$'de bir devir yapan $4,6m$ yarıçapında bir atlıkarıncanın en dış kenarına konulur. Sepetin konulduğu yerde kalabilmesi için sepet ve atlı-karınca arasındaki statik sürtünme katsayının en büyük değeri ne olmalıdır? $Cevap :\Rightarrow \leq 0,02$

9. Aynı tavana asılmış ve uzunlukları farklı iki konik sarkacın, uç noktalarının tavandan aynı uzaklıkta olduğunda, dönme periyotlarının eşit olduğunu gösteriniz. $Cevap :\Rightarrow \sqrt{\frac{h}{g}}$

10. Kütlesi $50kg$ olan bir cismin boyu $1,2m$ olan bir ipin ucuna bağlanarak bir konik sarkaç yapılır. Cisim, $25cm$ yarıçaplı çember üzerinde hareket eder.

    (a) Cismin hızı nedir? $Cevap :\Rightarrow v = 72cm/s$

    (b) Cismin ivmesinin büyüklüğü nedir? $Cevap :\Rightarrow a = 2,1m/s^2$

    (c) İpteki gerilme kuvveti nedir? $Cevap :\Rightarrow T = 0,50N$

11. Bir adam, kütlesi $67,8kg$ olan bir sandığı yerde yatayla 15 derecelik bir açı yapan bir halat yardımıyla çekmeye çalışıyor.

    (a) Statik sürtünme katsayısı $0,50$ ise, sandığı yerinden oynatmak için halatta yaratılması gereken gerilim kuvveti nedir? $Cevap :\Rightarrow T \geq 303,3N$.

    (b) Eğer kinetik sürtünme katsayısı $0,35$ ise sandığın başlangıç ivmesi nedir? $Cevap :\Rightarrow a = 1,3m/s^2$

Chapter 6

İŞ ve KİNETİK ENERJİ

Enerji bir türden diğer bir türe dönüşebileni yaratılamayan ve yok edilemeyen bir fiziksel niceliktir.

6.1 İş

Fizikte "iş yapmak", günlük hayatta kullanılan "iş yapmak" tan farklıdır. Bir cisim bir $\vec{F}$ kuvveti etkisinde $\triangle\vec{r}$ kadar yer değiştiriyor olsun. Cisme bu yer değişim boyunca , **Bu kuvvetin yaptığı iş** W**; kuvvetin yerdeğiştirmeye izdüşümlerinin toplamıdır.**

$$W = \vec{F} \cdot \triangle\vec{r}$$

İş bir **SKALER NİCELİKTİR** ve birimi **Joule**'dür.

$$1J = N \cdot m$$

İş hakkında konuşurken **HANGİ KUVVETİN** yaptığı iş hakkında konuştuğunuza dikkat ediniz.

İş Skaler olduğundan **POZİTİF** veya **NEGATİF** olabilir.

Kolaylık olsun diye tek boyutta bir hareket düşünelim;

- Eğer kuvvet ile yerdeğiştirme aynı yönde ise iş $W = F\triangle x > 0$,
- Eğer kuvvet ile yerdeğiştirme arasında bir açı varsa $W = F\triangle x \cos\theta$,
- Eğer kuvvet ile yerdeğiştirme birbirine dik ise $W = F\triangle x \cos 90 = 0$
- Eğer kuvvet ile yerdeğiştirme zıt yönlerde ise $W = -F\triangle x < 0$.

Örnek 49. *Bir halterci, tuttuğu halteri yere doğru indiriyor.*

- *Halterin ve ellerin SCD diyagramını çizin.*
- *Halterin haltercinin elleri üzerinde yaptığı iş nedir?*

$$W = \vec{F}_{H/E} \cdot \triangle\vec{r} > 0$$

- *Haltercinin ellerinin, halter üzerinde yaptığı iş nedir?*

$$W = \vec{F}_{E/H} \cdot \triangle\vec{r} < 0$$

Örnek 50. *Bir adam* $210N$ *şiddetinde bir kuvvet ile bir tekeri patlak arabasını yatayla* 30° *açı yapacak şekilde* $18m$ *itiyor.*

1. *Adamın yaptığı işi bulunuz.*

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= (210N)\cos 30^o\hat{i} + (210N)\sin 30^o\hat{j} \\
\triangle\vec{r} &= (18m)\hat{i} \\
W &= \left[(210N)\cos 30^o\hat{i} + (210N)\sin 30^o\hat{j}\right] \cdot \left[(18m)\hat{i}\right] \\
&= (210N)\frac{\sqrt{3}}{2}(18m)\hat{i}\cdot\hat{i} + (210N)\frac{1}{2}(18m)\hat{i}\cdot\hat{j} \\
&= 3,3 \times 10^3 J.
\end{aligned}$$

2. *Adamın karısı arabadan çıkarak* $\vec{F} = 160N\hat{i} - 40N\hat{j}$ *kuvvetiyle yardım ediyor. Bu kuvvet sonucu* $\triangle\vec{r} = 14m\hat{i} + 11m\hat{j}$*'lik bir yerdeğiştirmeye sebep oluyor. Kadın ne kadar iş yapmıştır?*

$$\begin{aligned}
W &= \left[160N\hat{i} - 40N\hat{j}\right] \cdot \left[14m\hat{i} + 11m\hat{j}\right] \\
&= (160N)(14m)\hat{i}\cdot\hat{i} + (-40N)(11m)\hat{j}\cdot\hat{j} \\
&= 1,8 \times 10^3 J.
\end{aligned}$$

Bir cisme birden fazla kuvvet aynı anda etkirse yapılan **TOPLAM İŞ**

$$W_{NET} = \vec{F}_{NET} \cdot \triangle\vec{r}$$

ile ifade edilir.

Örnek 51. *Bir çiftci odun kızağını bir traktörle yatayla* $36,9^o$ *açı yaparak ve ağırlığı ihmal edilebilen bir halatla çekerek* $20m$ *ilerletiyor. Toplam ağırlık şiddeti* $14700N$ *ve halattaki gerilme kuvvetinin şiddeti* $5000N$*'dur. Sürtünme kuvvetinin şiddeti* $3500N$ *olmak üzere*

1. *Kızağın SCD çizin.*

2. *Kızak üzerinde her kuvvetin yaptığı işi ayrı ayrı bulunuz.*

$$\begin{aligned}
W_W &= (-14700N)\hat{j}\cdot(20m)\hat{i} = 0\\
W_N &= (....)\hat{j}\cdot(20m)\hat{i} = 0\\
W_S &= (-3500N)\hat{i}\cdot(20m)\hat{i} = -70000J\\
W_T &= (5000N)\cos 36,9^o\hat{i}\cdot(20m)\hat{i} = 80000J\\
W_{net} &= 10000J
\end{aligned}$$

3. *Tüm kuvvetlerin yaptığı net iş nedir?*

$$\begin{aligned}
\sum \vec{F}_x &= (5000N)\cos 36,9^o\hat{i} + (-3500N)\hat{i} = 500N\hat{i}\\
\sum \vec{F}_y &= (5000N)\sin 36,9^o\hat{j} + n\hat{j} + (-14700N)\hat{j} = (0N)\hat{j}\\
\vec{F}_{NET} &= \sum \vec{F}_x + \sum \vec{F}_y\\
&= 500N\hat{i}\\
\triangle\vec{r} &= (20m)\hat{i}\\
W_{NET} &= \vec{F}_{NET}\cdot\vec{r}\\
&= \left[500N\hat{i}\right]\cdot\left[(20m)\hat{i}\right]\\
&= 10000J
\end{aligned}$$

6.2 Kinetik Enerji

Dış kuvvetlerin bir cisim üzerinde yaptığı işin yerdeğiştirmeyle orantılı olduğunu gördük. Bu kuvvetler cismin hızında da değişiklik yapar. O halde yapılan toplam iş, hız değişimiyle de orantılı olmalıdır.

Bir cisim düşünelim. Doğrusal olarak doğu yönünde bir düzlem üzerinde hareket etsin.

- Bu cisme doğu yönünde bir kuvvet uygularsak cisim hızlanır. Bu kuvvetin yaptığı iş pozitif olur.

- Bu cisme batı yönünde bir kuvvet uygularsak cisim yavaşlar. Bu kuvvetin yaptığı iş negatif olur.

- Bu cisme güney yönünde bir kuvvet uygularsak cismin sürati değişmez. Bu kuvvetin yaptığı iş sıfırdır.

Dolayısıyla yapılan iş ile sürat arasındaki ilişkiyi gözlemlemiş oluruz. Cisim v_1 süratiyle harekete başlasın, $\vec{F}$ kuvvet vektörü uygulanınca belirli bir mesafe içinde ivmelenip süratini v_2'ye çıkarmış olsun. Sabit ivmeli hareket için zamandan bağımsız denklemi kullanırsak ivmeyi

$$\begin{aligned} v_2^2 &= v_1^2 + 2a(\triangle r) \\ a &= \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\triangle r} \\ |\vec{F}| &= m|\vec{a}| \\ &= m\frac{v_2^2 - v_1^2}{2\triangle r} \\ W_F &= \vec{F} \cdot \triangle\vec{r} \\ &= \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \end{aligned}$$

Kinetik Enerji: Eylemsiz referans sisteminde, bir cismin kütlesi ile süratinin karesinin yarısı, cismin kinetik enerjisi olarak tanımlanır. Skaler bir büyüklüktür, kütleyi ve sürati MKS sisteminde seçerseniz, birimi yine aynı sistemde **Joule** olarak elde edilir.

$$KE = \frac{mv^2}{2}. \tag{6.1}$$

6.3 İş Enerji Teoremi

Eylemsiz bir referans sisteminde bir parçacığın üzerinde net kuvvetin yaptığı iş, parçacığın Kinetik Enerjisindeki değişimdir. Buna **İş-Enerji Teoremi** denir.

$$\begin{aligned} W_F &= KE_2 - KE_1 && (6.2) \\ &\equiv \triangle KE. && (6.3) \end{aligned}$$

- Net iş sıfırdan büyükse son kinetik enerjisi ilkinden büyük olur, cismin süratlendiğini anlarız.
- Net iş sıfırdan küçükse son kinetik enerjisi ilkinden küçük olur, cismin süratinin azaldığını anlarız.
- Net iş sıfırdan sıfırsa son kinetik enerjisi ilkine eşit olur, cismin sürati değişmez.

Farklı eylemsiz referans sistemlerinde farklı ölçümler olacağı açıktır. Kinetik enerjiler farklı değerler olarak bulunur, fakat kinetik enerjilerin farkı her zaman net kuvvet tarafından yapılan işe eşit çıkar.

Örnek 52. *Örnek (51) için, kızağın ilk sürati* $20m/s$ *olsun. Kızak* $20m$ *şiddetinde yerdeğiştirdiği andaki süratini İş-Enerji Teoremi yardımıyla bulunuz.*

Kızağın ağırlığının şiddeti $14700N$ *olduğuna göre yerçekim ivmesinin şiddetini kullanarak kütlesini* $m = \frac{14700N}{9{,}8m/s^2} = 1500kg$ *buluruz. O halde İş-Enerji Teoremi*

$$\begin{aligned}
W_{Net} &= 10000J \\
&= KE_2 - KE_1 \\
KE_1 &= \frac{1}{2}(1500kg)(20m/s)^2 \\
&= 300000J \\
\Rightarrow KE_2 &= 10000J + 300000J \\
&= 310000J \\
\frac{1500kg}{2}v_2^2 &= 310000J \\
v_2 &= 20,33m/s
\end{aligned}$$

Örnek 53. $200kg$ *kütleli bir balyoz ile I şeklindeki bir çelik yere çakılmak isteniyor. Balyoz yerden* $3m$ *yüksekten* $60N$ *şiddetinde sabit bir sürtünmeli kızak yardımıyla serbest bırakılıyor ve çeliği* $7,4cm$ *yere gömüyor. İş-Enerji Teoremini kullanarak*

1. *Düşen balyozun SCD çizin.*
2. *Balyozun çeliğe vurmadan önceki süratini bulunuz.*
3. *Balyozun çeliğe iterken SCD çizin*
4. *Çeliğin balyoza uyguladığı normal kuvveti bulunuz.*

6.4 Kinetik Enerjinin Anlamı

Eylemsiz bir referans sisteminde yapılan iş, kinetik enerjideki değişimdir. Durgun halden hızlanan bir cisim olduğu durumu düşünürsek Kinetik enerjideki değişim, son kinetik enerjiye her zaman eşit olur. O halde durgun halden bir cismi bir kuvvet yardımıyla hareket ettirirsek, yapılan iş sisteme kazandırdığımız kinetik enerji kadardır. İşte Kinetik enerjinin bir tanımıda budur.

Bir parçacığının KE'si onu durağan halden halihazırdaki süratine kadar ivmelendiren toplam iştir,

veye her zaman tam terside söylenebilir, şöyleki

Bir parçacığının KE'si o parçacığın hareket halinden durağan hale getirme sürecinde yapılan toplam iştir.

6.5 Değişken Kuvvetlerle İş ve Enerji

Kuvvet her zaman sabit olmak zorunda değildir. Klasik örnek olarak bir yaya bağlı bir kütlenin harmonik devinimi. Yay en çok uzadığı yerde kuvvetin şiddeti maksimum olur. Yayın uzamasının olmadığı yerde kuvvet minimum olur fakat cisim belirli bir hızla hareket ettiği için hareketine devam eder. Böyle bir durumda iş tanımını her noktada ayrı ayrı toplamlar alarak yaparız. Matematiksel olarak bu

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{6.4}$$

ile ifade edilir. Sabit kuvvet olduğu özel durumlarda

$$\begin{aligned} W &= \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \vec{F} \cdot \int_{r_1}^{r_2} d\vec{r} \\ &= \vec{F} \cdot \triangle\vec{r} \end{aligned}$$

eski halini doğrular.

Yay örneğine geri dönersek *Hooke Yasası* kuvvet ile yerdeğiştirme arasında yayın bozulmadan hareketi sırasında aşağıdaki gibi bir ilişkinin olduğunu söyler.

$$\vec{F} = k\triangle\vec{r} \tag{6.5}$$

k yay sabitidir. Kütle $\vec{F}$ kuvvetiyle durağan olduğu yerden x kadar yerdeğiştirirse, kuvvetin yaptığı iş

$$\begin{aligned} W &= \int_0^x k\vec{r} \cdot d\vec{r} \\ &= k\int_0^x \vec{r} \cdot d\vec{r} \\ &= k\frac{\vec{r}^2}{2}\Big|_0^x. \\ &= k\frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Yayı sıkıştırmak için kuvvet uygulasaydık yine aynı sonuç elde edilirdi. Şimdi bu olayı yayın herhangi bir yerdeğimi için yaparsak

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_1}^{x_2} k\vec{r} \cdot d\vec{r} \\ &= k\frac{x_2^2}{2} - k\frac{x_1^2}{2}. \end{aligned}$$

elde ederiz. **Yayın yaptığı iş ise yaya karşı yapılan işin negatifidir.**

Ev ödevi 18. *600N ağırlık şiddetinde olan bir kadın, katı yaylı bir terazi üzerine çıkar. Yay kendi denge durumundan 1cm sıkışır.*

- *Yayın SCD çizin.*
- *Yay sabitini bulun.*
- *Bu sıkıştırmada kadının ağırlığının yaptığı iş nedir?*

6.6 İŞ-ENERJİ Teoreminin Genelleştirilmesi

Kuvvetimizin sabit olmadığı durumlar içinde İş-Enerji Teoreminin geçerli olduğunu gördük. Bunu genelleştirmenin bir yolunu göstereceğiz. Kuvvet anlık olarak değiştiğinden ivmemiz de anlık değişimler gösteriyordur. İvmenin tanımından

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \\ &= \frac{d\vec{v}(t)}{|d\vec{r}(t)|}\frac{|d\vec{r}(t)|}{dt} \\ &= |\vec{v}(t)|\frac{d\vec{v}(t)}{|d\vec{r}(t)|}.\end{aligned}$$

İş

$$\begin{aligned}W &= \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}(t)\cdot dr(\vec{t}) \\ &= \int_{r_1}^{r_2} m|\vec{v}(t)|\frac{d\vec{v}(t)}{|d\vec{r}(t)|}\cdot dr(\vec{t}) \\ &= \int_{v_1}^{v_2} m|\vec{v}(t)||d\vec{v}(t)| \\ &= m\frac{v_2^2}{2} - m\frac{v_1^2}{2} \\ &= KE_2 - KE_1.\end{aligned}$$

elde edilir. Anlaşıldığı gibi kuvvetimiz sabit veya değişken özellik göstersin, İŞ-ENERJİ teoremi her EYLEMSİZ REFERANS SİSTEMİNDE çalışır.

Örnek 54. *Yatay bir hava rayına kütlesi* $100g$ *olan kaygan bir parça bir yay yardımıyla bağlanmıştır. Başlangıçta gerili olmayan yayın kuvvet sabiti* $20N/m$ *dir. Kayan parça doğu yönünde* $1,5m/s$ *süratle gitmeye başlıyor.*

- *Cismin SCD diyagramını çiziniz.*
- *Bu cismin doğu yönünde gideceği maksimum mesafe olan d'yi hesaplayınız?*
- *Hava akımı kesilirde masa sürtünme katsayısı* $\mu_k = 0,47$ *olan sürtünmeli bir masa haline gelirse gidebileceği maksimum yeni mesafe nedir?*

Örnek 55. *Bir salıncağı salladığınızı düşünelim. Salıncağın ağırlığının şiddeti* W*, bağlı bulunduğu zincirin uzunluğu* R *olsun. Zincirin düşey ile her an değişen* $\theta(t)$ *açısı olduğunu düşünelim. Salıncağın düşey yönle en fazla yapacağı açı* θ_0 *olsun. Salıncağı sallarken bu açıyı sıfırdan başlayarak ve yavaş yavaş attırarak, çok çok yavaş neredeyse dengede hareket ettirecek şekilde değişen yatay bir* $\vec{F}$ *kuvveetini uyguluyorsunuz.*

- *Salıncakın SCD çizin.*
- *Salıncak üzerinde tüm kuvvetlerin yaptığı toplam iş nedir.*
- *Salıncağı çok yavaş (neredeyse dengede gibi olacak şekilde) iterken uyguladığınız kuvvetin yaptığı iş nedir?*

Örnek 56. *Örnek (55) için sonsuz küçük yerdeğiştirme hareketi* $d\vec{r}$*'yi bulalım. Bu vektörün büyüklüğü* dr *dir, bileşen vektörler cinsinden*

$$d\vec{r} = dr\cos\theta\hat{i} + dr\sin\theta\hat{j}$$

ile yazılır. Bunu kullanarak

- *Tüm kuvvetlerin yaptığı işi tek tek bulunuz.*
- *Salıncak üzerinde tüm kuvvetlerin yaptığı toplam işin doğruluğunu kontrol ediniz.*

6.7 Güç

Fizikte tanımlanan **Güç**, işin yapılma hızıdır. P ile gösterilir. Birimi

$$Watt = \frac{Joule}{s} \tag{6.6}$$

Ortalama ve anlık olarak tanımlanır. Ortalama güç

$$P_{ort} = \frac{\triangle W}{\triangle t} \tag{6.7}$$

Anlık güç ise

$$\begin{aligned} P(t) &= \lim_{t \to 0} P_{ort} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\triangle W}{\triangle t} \\ &= \frac{dW(t)}{dt}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Gücün mekanikteki bir diğer ifade şekli de aşağıdaki gibi verilebilinir.

Bir cisim $\triangle \vec{r}$ yerdeğiştirmesini bir kuvvet etkisi altında yaparken kuvvetin yerdeğiştirmeye olan izdüşümü bize işi verir.

$$\begin{aligned} P_{ort} &= \frac{\vec{F} \cdot \triangle \vec{r}}{\triangle t} \\ &= \vec{F} \cdot \vec{v}_{ort}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Anlık güç ise zaman limitinin sıfıra yakınsamasıdır. O halde

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}. \tag{6.10}$$

Örnek 57. *Bir uçağın motoru* $197000N$ *değerinde bir itme kuvveti üretir. Uçak saatte* $900km$ *süratle giderken motorunun gücü nedir?*

Örnek 58. $50kg$ *kütleli bir kadın* $443m$ *yüksekliğindeki bir gökdelene merdivenleri kullanarak* 15 *dakikada tırmandığına göre, ortala gücünü hesaplayınız.*

6.8 ÖDEV SET 6

1. Bir adam, kütlesi 50 kg olan bir bloğu yatay bir zemin üzerinde kaydırmak için yataydan yukarı doğru 20°'lik açı doğrultusunda $200N$'luk kuvvet uygular. Zeminin bloğa uyguladığı sürtünme kuvvetinin büyüklüğü 175N'dur. Blok $3,0$m yol aldığında,
   (a) Adamın,
   (b) sürtünme kuvvetinin,
   (c) yer çekiminin,
   (d) zeminin bloğa uyguladığı normal kuvvetin yaptığı işler nedir?
   (e) Blok üzerine yapılan toplam iş nedir?

2. Bir adam, eğim açısı 25° olan bir eğik düzlem üzerindeki kütlesi 25 kg olan bloğu yukarı doğru kaydırmak için eğik düzleme paralel doğrultuda 220 N'luk kuvvet uygular. Eğik düzlemin bloğa uyguladığı sürtünme kuvvetinin 96 N'dur. Blok $1,5$ m kaydırıldığında
   (a) Adamın,
   (b) sürtünme kuvvetinin,
   (c) yer çekiminin,
   (d) zeminin bloğa uyguladığı normal kuvvetin yaptığı işler nedir?
   (e) Blok üzerine yapılan toplam iş nedir?

3. Bir eltopu oyuncusu, elindeki kütlesi 250 g olan topu 18 m/s'lik başlangıç hızı ile fırlatıyor. Diğer bir oyuncu, topun hızı 12 m/s'ye ulaştığı zaman aynı seviyede topu yakalıyor. Hava sürtünmesi tarafından yapılan iş nedir?

4. Kütlesi 240 g olan lastik bir top, 15 m/s hız ile batı yönünde hareket etmektedir. Kuzey güney doğrultusunda bulunan bir duvara çarpan top, doğu yönünde 12 m/s hız ile geri döner. Duvarın, top üzerine yaptığı iş nedir?

5. 55 kg'lık bir kadın merdivenlerden yukarı doğru koşarak $3,5$ s içinde $4,5$ m yüksekliğe çıkıyor. Kadının sağladığı ortalama güç nedir?

6. Kütlesi $51,0$ kg olan bir dağcı, $10,0$ s içinde uzunluğu $6,00$ m olan düşey halata sabit hızla tırmanıyor.
   (a) Dağcı ne kadar iş yapar?
   (b) Tırmanış sırasında dağcının sağladığı güç nedir?

Chapter 7

POTANSİYEL ENERJİ ve ENERJİNİN KORUNUMU

Kinetik enerji ve yapılan iş hakkında farklı bir düşünceyi daha inceleyeceğiz.

7.1 Kütleçekim Potansiyel Enerjisi

Şu ana kadar, cisimlere etkiyen kuvvetler sayesinde cisimlerim kinetik enerji değişimleri yaşadıklarını gördük. Daha net söylememiz gerekirse İş-Enerji Teoremiyle, yapılan toplam işin sistemin kinetik enerjisindeki değişimdir.

Bazı durumlarda ise, sistemin içine bir enerji depolanmış gibi düşünürüz. Örnek olarak bir taşı yerden alıp yukarı doğru kaldırdıp tuttuğumuzda kolumuz taşın üstüne bir iş yapmış olur, fakat taş elimizde olduğu için kinetik enerjisinde bir değişim olmamıştır. Taşı tuttuğumuz için yapılan iş kinetik enerjiye dönüşmemiştir ama farklı bir enerji şeklinde sistemde depolanmıştır. Kinetik (yani hareket) başlayana kadar kinetik enerji olarak karşımıza çıkmayacaktır.

İşte bu depolanan enerjilere **POTANSİYEL ENERJİ** denir ve bir sürü çeşidi vardır. Bu örnek için konuşursak; kolumuzun yaptığı iş, taşın kütlesine, başlangıç noktasından olan uzaklığa (yani yüksekliğine) bağlıdır. Bu tip enerjilere **Kütleçekim Potansiyel Enerjisi** denir. *Daha önce bu enerjiyi sadece potansiyel enerji olarak tanımlamıştınız, bundan sonra kesinlikle Kütleçekim potansiyel enerji olarak tanımlamanızı istiyorum. Nedenini yeri geldiğinde açıklayacağım.*

Peki taşı elimizden bıraktığımız anda ne oluyor. Depolanan enerji kinetik enerjiye nasıl dönüşüyor?

Hemen bir koordinat sistemi belirleyelim. Yerden yukarı doğru yönü pozitif seçelim. Sıfır konumu yerin üstü olsun. Dolayısıyla parçacığın ilk konum vektörü için

$$\vec{y}_1(t = 0s) = y_1\hat{j} \tag{7.1}$$

yazabiliriz. Belirli bir zaman sonra konumu

$$\vec{y}_2(t) = y_2\hat{j}. \tag{7.2}$$

Yerdeğiştirme vektörü

$$\begin{aligned}\triangle\vec{r}(\triangle t) &= \vec{y}_2(t) - \vec{y}_1(t = 0s) \\ &= (y_2 - y_1)\hat{j}\end{aligned}$$

Cismin SCD şöyle düşünelim, yerçeki kuvvetinden dolayı olan ağırlığı $\vec{W}_g$ ve diğer kuvvetler $\vec{F}_d$

$$\vec{W}_g = -mg\hat{j} \tag{7.3}$$

Yerçekim kuvvetinin yaptığı iş

$$\begin{aligned}W_G &= \vec{W}_g \cdot \triangle\vec{r}(\triangle t) \\ &= \Big[-mg\hat{j}\Big] \cdot \Big[(y_2 - y_1)\hat{j}\Big] \\ &= mg(y_1 - y_2)\end{aligned}$$

Yapılan bu iş, İş-Enerji Teoremine göre kinetik enerjideki değişimdir.

$$\begin{aligned}W_G &= KE_2 - KE_1 \\ &= mg(y_1 - y_2) \\ &= \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \\ mgy_1 + \frac{mv_1^2}{2} &= mgy_2 + \frac{mv_2^2}{2}.\end{aligned} \tag{7.4}$$

Bu bir korunum yasasıdır. Sistemin ilk durumundaki Kinetik Enerjisine eklenen bir terimle, ikinci durumundaki kinetik enerjisine eklenen diğer terim hep sabit kalıyor. Bu **Mekanik Enerjinin Korunum yasasıdır**.

Şimdi eklediğimiz terim için tanım yapalım:

Kütleçekim Potansiyel Enerjisi: Bir cismin kütle çekim potansiyel enerjisi; cismin kütlesine, yerçekim sabitine ve bir referans noktasına göre yüksekliği ile tanımlanır. Skaler bir büyüklüktür ve birimi **Joule** dür.

$$U_g = mgy$$

7.1.1 Mekanik Enerjinin Korunum Yasası:

Mekanik korunum yasasını daha güzel yazabiliriz. Yerçekim kuvvetinin yaptığı iş kinetik enerjideki değişimdi.

$$\begin{aligned}W_G &= KE_2 - KE_1 = \triangle KE \\ &= U_{g1} - U_{g2} = -\Big[U_{g2} - U_{g1}\Big] = -\triangle U_g.\end{aligned} \tag{7.5}$$

Bu eşitlikten

$$\begin{aligned} \triangle KE &= -\triangle U_g \\ \triangle KE + \triangle U_g &= 0. \end{aligned}$$

Mekanik Enerji E'yi sistemin Kinetik ve Kütleçekim potansiyel enerjilerinin toplamı olarak tanımlarsak

$$E = KE + U_g$$

Mekanik enerjinin korunumu, mekanik enerji değişimlerinin toplamının sıfır olması anlamına gelir.

$$\begin{aligned} \triangle E &= \triangle KE + \triangle U_g \\ &= 0. \end{aligned}$$

Toplam Mekanik Enerjinin Korunumu, yani her anda sabit bir değer olması bize referans sistem seçim serbestliği sağlar.

Bütün bunların fiziksel karşılığını da düşünelim, bir cisim aşağı yönde belirli bir yüksekten belirli bir sürat ile hareket yerçekim kuvveti altında hareket ederken kütleçekim potansiyel enerjisindeki değişim kinetik enerjisi tarafından karşılanır. Mekanik enerji korunacağına göre, kinetik enerjisi artarken potansiyel enerjisi azalır.

Örnek 59. *Kütlesi* $145g$ *olan bir topu* $20m/s$ *başlangıç süratiyle yukarı doğru atıyoruz. Bütün sürtünmeleri ihmal edersek top en fazla ne kadar yükselir?*

Hemen bir koordinat ekseni belirleyelim. Topun elden çıktığı nokta sıfır noktası olmak üzere, yukarı yönü pozitif alalım. Topun elden çıktığı noktada bir kinetik enerji varken, kütleçekim potansiyel enerji yoktur. Topun durduğu en yüksek noktada ise Kinetik Enerji sıfırlanır. Toplam Mekanik Enerji korumum yasasından

$$\begin{aligned} mgy_1 + \frac{mv_1^2}{2} &= mgy_2 + \frac{mv_2^2}{2} \\ \frac{mv_1^2}{2} &= mgy_2 \\ y_2 &= \frac{v_1^2}{2g} = 20,4m. \end{aligned}$$

bulunur.

7.1.2 Kütleçekimi dışında kuvvetler de iş yaparsa?

Cismin SCD düşünürken diğer kuvvetlerin de olabileceğini söylemiştik. Eğer böyle bir durum varsa yapılan toplam iş net kuvvetin yaptığı iştir.

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{Net} &= \vec{W}_g + \vec{F}_d \\
W_{Net} &= \left[\vec{W}_g + \vec{F}_d\right] \cdot \triangle\vec{r}(\triangle t) \\
&= W_G + W_{Diger}.
\end{aligned}$$

Net işi, yerçeki kuvvetinin yaptığı iş ile diğer kuvvetlerin yaptığı işin toplamı olarak yazarız. İş-Enerji Teoremi tekrar devreye girer ve bu net iş, Kinetik Enerjideki değişime eşit olur.

$$\begin{aligned}
W_G + W_{Diger} &= KE_2 - KE_1 \\
U_{g1} - U_{g2} + W_{Diger} &= KE_2 - KE_1 \\
U_{g1} + KE_1 + W_{Diger} &= U_{g2} + KE_2. \qquad (7.6)
\end{aligned}$$

Diğer kuvvetlerin varlığı altında sistemin enerjisi korunmamaktadır. Öyleki:

- $W_{Diger} > 0$ ise sistemdeki enerji artar.
- $W_{Diger} < 0$ ise sistemdeki enerji azalır.
- $W_{Diger} = 0$ ise sistemdeki enerji sabit kalır.

Örnek 60. *Örnek (59)'da topu elden çıkartmadan hemen önce elin yerden* $50cm$ *yukarı hareket ettirdiğimizi varsayalım. bu hareketin hemen ardından top elden yukarı doğru* $20ms/$ *hızla çıkıyor olsun.*

1. *El topu yukarı doğru sabit bir kuvvet uyguladıysa bu kuvveti bulunuz.*

   Toplam mekanik enerjinin korunumu bize referans noktasını belirleme serbestliği veriyordu. Bunu kullanabilmek açısından topun elden çıktığı noktadan sonra mekanik enerjinin korunacağını düşünerek, elden topun ayrıldığı yüksekliği sıfır noktası alıp, yerden yukarı yönü pozitif tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
\vec{F}_d &= F\hat{j} \\
\vec{y}_1 &= -0,50m\hat{j} \\
\vec{y}_2 &= 0m\hat{j} \\
\triangle\vec{y} &= \left[(0m) - (-0,50m)\right]\hat{j} \\
W_{Diger} &= \vec{F}_d \cdot \triangle\vec{y} \\
&= F\left[(0,50m)\right](\hat{j} \cdot \hat{j})
\end{aligned}$$

Top eldeyken ilk kinetik enerjisi sıfır Joule, kütleçekim potansiyel enerjisi ise sıfırdan farklıdır.

$$\begin{aligned} KE_1 &= 0J \\ U_{g1} &= (0,145kg)(9,8m/s^2)(-0,50m) \\ &= -0,71J \end{aligned}$$

Elden çıkarkenki kütleçekim potansiyel enerjisi sıfır Joule ve kinetik enerjisi ise sıfırdan farklıdır.

$$\begin{aligned} KE_2 &= \frac{1}{2}(0,145kg)(20m/s)^2 \\ &= 29,0J \\ U_{g2} &= 0J. \end{aligned}$$

O halde

$$\begin{aligned} U_{g1} + KE_1 + W_{Diger} &= U_{g2} + KE_2 \\ -0,71J + 0J + F\Big[(0,50m)\Big] &= 0J + 29,0J \\ F &= \frac{29,7J}{0,50m} = 59,4N \\ \vec{F}_d = 59,4N\hat{j}. \end{aligned}$$

2. *Topun elden çıktığı noktanın* $15m$ *yukarısındaki sürati nedir?*

   Bu noktadan sonra diğer kuvvet iş yapmıyor çünkü top elden çıkmış oluyor.

$$U_{g2} + KE_2 = U_{g3} + KE_3$$

Sistemin kütleçekim potansiyel enerjisi topun elden çıktığı anda sıfır Joule'dür. Sistemin $15m$ *yüksekte hem kütleçekim potansiyel enerjisi hemde harekete devam ettiği için bir kinetik enerjisi vardır.*

$$\begin{aligned} 0J + \frac{1}{2}(0,145kg)\Big(20\frac{m}{s}\Big)^2 &= (0,145kg)(9,8\frac{m}{s^2})(15,0m) + \frac{1}{2}(0,145kg)(v_3)^2 \\ v_3 &= 10(m/s) \end{aligned}$$

Burada sürat denildiği cevap pozitif köktür. Hız istenmiş olsaydı $\vec{v}_3 = \mp(10m/s)\hat{j}$ *yazılacaktı.*

7.1.3 Eğri Boyunca Hareket için Kütleçekim Potansiyel Enerji

Cismin düşey olarak değilde bir eğri boyunca hareket ettiğini düşünelim. Yerdeğiştirme vektörü

$$\triangle\vec{r}(t_2 - t_1) = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k}.$$

Yerçekim kuvveti

$$\vec{W}_g = -mg\hat{k}$$

olduğuna göre Kütleçekim kuvvetinin yaptığı iş,

$$\begin{aligned} W_G &= \vec{W}_g \cdot \Big[(x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k}\Big]. \\ &= -mg(z_2 - z_1) \\ &= mgz_1 - mgz_2 \\ &= U_{g1} - U_{g2}. \end{aligned}$$

Sonuç olarak eğrisel yolda veya doğrusal yolda, cisim nasıl hareket ederse etsin, Kütleçekim Potansiyel Enerjisi kullanılan tanımlar değişmemiştir.

Örnek 61. *Bir ilkokul öğrencisi kaykayı ile* $3,0m$ *yarıçaplı sürtünmesiz dikey dairesel bir rampadan aşağı kayıyor. Öğrenciyi noktasal bir parçacık gibi düşünelim ve kütlesi* $25kg$ *alalım. Öğrenci hareketine durağan başlayarak sürtünmesiz rampada çemberin dörtte biri kadar ilerlediğini düşünerek*

1. *Öğrencinin rampanın en alt noktasındaki sürati nedir?*
2. *Rampanın taban noktasında öğrenciye etkiyen Normal Kuvveti bulunuz.*
3. *Rampanın sürtünmeli olduğunu kabul edelim. Taban noktasındaki sürati* $6,0(m/s)$ *olursa, Sürtünme kuvveti sistemde ne kadar iş yapmıştır?*

Örnek 62. *Kütlesi* $12kg$ *olan bir sandık sürtünmeli bir rampadan yukarı doğru kaydıralarak bir kamyonun kasasına yüklenecektir. Rampanın uzunluğu* $2,5m$ *ve yatayla olan açısı* 30 *derecedir. Sandığa ilk olarak* $5,0(m/s)$ *şiddetinde bir sürat verilirse, sandık sadece* $1,6m$ *ilerleyip geri dönüyor.*

1. *Sürtünme kuvvetinin sabit olduğunu kabul ederek şiddetini bulunuz.*
2. *Sandık geriye döndüğü andaki sürati nedir?*

7.2 Esneklik Potansiyel Enerjisi

Birçok durumda kütleçekiminden kaynaklanmayan başka tür Potansiyel Enerjilerle de karşılaşılır. Örnek olarak, bir lastik sapandaki kauçuk lastik gerilirken kolumuz iş yapar ve bu enerji lastikte depolanır. Lastiği bıraktığımızda ise elde edilen Potansiyel Enerji Kinetik Enerjiye dönüşür.

Esnek(Elastik) Cisim: Bir cisim serbest bırakıldıktan sonra eski halini alıyorsa bu Elastik bir cisimdir.

7.2.1 İdeal bir elastik yay

İdeal bir yayı küçük $\triangle\vec{x}$ kadar yerdeğiştirmek için uygulamamız gereken kuvvet Hooke Yasasına göre

$$\vec{F} = k\triangle\vec{x}$$

ile ifade edilir. Sürtünmesiz bir ortamda bulunan yayın ucuna m kütleli bir cisim takalım. Yayın uzamamışken, kütlenin durgun olduğu yeri başlangıç noktası seçerek yayın bulunduğu aksi yönünü pozitif yön kabul edelim.

- Yay ne gerilmiş ne de sıkışmış olduğundan kütle denge konumunda başlangıç noktasında bulunmaktadır.
- Yayı pozitif yöne doğru $\vec{F}$ kadar çekelim. Kütleyi başlangıça göre $\vec{x}$ noktasına getirdiğimizi düşünelim. Olayı en genel halde yapabilmek için başlangıç noktası gibi özel bir noktadan farklı herhangi bir x_1 noktasından başka herhangi bir x_2 noktasına hareket olduğunu kabul edelim. Kuvvetin yaptığı toplam işi integre ederek bulmalıyız çünkü kuvvet her noktada farklı şiddettedir.

$$\begin{aligned} W_F &= \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}\cdot d\vec{x} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} kxdx(\hat{i}\cdot\hat{i}) \\ &= k\frac{x^2}{2}\Big|_{x_1}^{x_2} \\ &= \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} \end{aligned}$$

- Bu cismi bıraktığımız anda sistemde depolanan Enerji, Kinetik Enerjiye dönüşecektir. Yayın yapacağı iş, kuvvetin yaptığı işin negatif işaretlisidir. Bu işte İş-Enerji Teoremine göre Elastik Potansiyel Enerjideki değişim:

$$\begin{aligned} W_E &= -W_F \\ &= \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} \\ &= U_{e1} - U_{e2} = -\triangle U_e \\ &= KE_2 - KE_1 = \triangle KE. \end{aligned}$$

Burada Elastik Potansiyel Enerji olarak

$$U_e = \frac{kx^2}{2}$$

tanımını yaptık.

Mekanik Enerji E'yi sistemin Kinetik ve Elastik Potansiyel Enerjilerinin toplamı olarak tanımlarsak

$$E = U_e + KE = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

Böylece sistemin toplam Enerjisi tıpkı kütleçekimindeki gibi korunur. Mekanik enerjinin korunumu, mekanik enerji değişimlerinin toplamının sıfır olması anlamına gelir.

$$\begin{aligned} \triangle E &= \triangle KE + \triangle U_e \\ &= 0. \end{aligned}$$

Toplam Mekanik Enerjinin Korunumu, bu sefer bize referans sistem seçim serbestliği sağlamaz, çünkü elastik hareket bir denge konumu etrafında kendini tekrarlamak zorundadır. Buradaki fark yay sıkışsada uzasada Elastik Potansiyel enerjideki terim yer değişimin karesi ile orantılı olduğundan Elastik Potansiyel Enerji artar. Dolayısıyla Kinetik Enerji o durumlarda azalır.

Diğer bir önemli fark da tanımlarında saklıdır.

$$\begin{aligned} U_g &= mgy \\ U_e &= \frac{kx^2}{2} \end{aligned}$$

7.2.2 Kütleçekim Potansiyel Enerji ile Elastik Potansiyel Enerji Beraber olur mu?

Tabii ki olur. Dikey olarak yerleştirilmiş bir yayı düşünürsek, Potansiyel Enerji hem kütleçekiminden hemde Elastik Enerjiden oluşur. En genel olarak hepsini aynı anda yazabilmek için toplam işi

- Yerçekim kuvvetinin yaptığı iş, W_G
- Elastik kuvvetin yaptığı iş, W_E
- Diğer kuvvetlerin yaptığı iş, W_d

yazarsak, net iş, İş-Enerji Teoremine göre kinetik enerjideki değişimle yazarız.

$$\begin{aligned} W_G + W_d + W_E &= \triangle KE \\ (U_{g1} - U_{g2}) + W_d + (U_{e1} - U_{e2}) &= KE_2 - KE_1 \\ U_{g1} + U_{e1} + KE_1 + W_d &= U_{g2} + U_{e2} + KE_2 \qquad (7.7) \end{aligned}$$

Tanım olarak Kütleçekim ve Elastik Potansiyel Enerjiye sadece **Potansiyel Enerji** derseniz, size orta öğretimde gösterilen ifadeye ulaşmış olursunuz.

$$\begin{aligned} U &\equiv U_g + U_e \\ U_1 + KE_1 + W_d &= U_2 + KE_2 \end{aligned} \tag{7.8}$$

Esneklik ve kütleçekimi kuvvetleri dışındaki tüm kuvvetlerinin yaptığı iş sistemin toplam mekanik enerjideki değişime eşittir. Eğer diğer kuvvetler iş yapmıyorsa

$$U_1 + KE_1 = U_2 + KE_2$$

sonucuna ulaşırız.

Örnek 63. *Kütlesi $m = 200g$ olan bir cisim, sürtünmesiz yatay hava masa üzerinde kuvvet sabiti $k = 5,00(N/m)$ olan yaya bağlı olarak durmaktadır. Yayı $10cm$ uzatacak şekilde kütleyi çekip, ilk süratsiz olarak serbest bırakıyoruz. Kütle $x = 0$ denge konumuna doğru harekete başlıyor. Kütlenin $8cm$ konumundan geçerken ki anlık sürati nedir?*

Örnek 64. *m kütleli cisim sürtünmesiz yatay düzlem üzerinde bir yaya bağlı durmaktadır. pozitif$-x$ doğrultusunda sabit bir $\vec{F}$ kuvvetine maruz kalıyor.*

- *Kütle x_1 konumuna ulaştığı andaki süratini verilenler cinsinden yazınız.*
- *Sayısal sonuç için $m = 200g$, $k = 5,00(N/m)$, $|\vec{F}| = 0,610N$ ve konumu $x_1 = 10cm$ alınız.*

Örnek 65. *En kötü ihtimal senaryosuna göre tasarlanan $2000kg$ kütleli bir asansör, kablonun kopmasıyla $4,00(m/s)$ süratle düşerken emniyet yayına dokunur ve $2m$ içinde $17000N$'luk bir sürtünmeye maruz kalıp durur. Bu senaryonun doğru olabilmesi için yay sabiti ne olmalıdır?*

7.3 Korunumlu ve Korunumsuz Kuvvetler

İş yapan kuvvetleri korunumlu ve korunumsuz kuvvetler olarak ikiye ayıralım.

7.3.1 Korunumlu Kuvvetler

Kinetik Enerjiyle Potansiyel Enerji arasındaki karşılıklı dönüşüme izin veren kuvvetlere **Korunumlu Kuvvetler** denir. Örnek olarak yerçekim kuvveti, Yay Elastik kuvveti vb...

Korunumlu kuvvetleri genel olarak dört adet özellik altında toplarız. Yapılan iş,

- Potansiyel Enerji Fonksiyonunun başlangıç ve bitiş konumlarının farkı olarak ifade edilebilinir.
- Tersinir bir harekettir.
- Cismin izleyeceği yoldan bağımsızdır, sadece başlangıç ve son konuma bağlıdır.
- Eğer cisim başladığı konuma geri dönüyorsa yapılan iş sıfırdır.

YAPILAN İŞ KORUNUMLU KUVVETLERCE YAPILIYORSA, TOPLAM MEKANİK ENERJİ SABİTTİR.

7.3.2 Korunumsuz Kuvvetler

Tanım olarak korunumlu olmayan tüm kuvvetler korunumsuz kuvvetlerdir.

- Korunumsuz kuvvetlerde yapılan iş, potansiyel enerjinin bir fonksiyonu ile ifade edilemez.
- Mekanik Enerjiyi azaltıcı veya artırıcı korunumsuz kuvvetler olabilir.
- Tersinir değildirler.

Örnek olarak, oksijen ile barutun reaksiyonu, havayi fişek patlamaları, vb..

Örnek 66. *$40kg$ kütleli bir mobilyayı $2,50m$ taşımak istiyoruz. Fakat önümüzde bir engel olduğu için önce geometri bilgimizi kullanarak $2,0m$ yana sonra $1,5m$ ileri iterek (Pisagor dik üçgenini kullanarak) taşıyoruz. Ortamın kinetik sürtünme katsayısı $\mu_k = 0,20$ olduğuna göre, taşıma sırasında ne kadarlık fazla iş yapılmıştır.*

Örnek 67. *Uzayın belirli bir bölgesinde etkili olan kuvvet $\vec{F} = Cx\hat{j}$ ile tanımlanmış olsun. C pozitif sabit bir katsayıdır. Bu kuvvet bir cismi köşeleri $(0,0)$ $(L,0)$ (L,L) $(0,L)$ olan kare etrafında saat ekseninin tersine döndürsün.*

1. *Bu kuvvetin yaptığı toplam iş nedir?*
2. *Bu kuvvet korunumlu mudur, değil midir?*

7.3.3 Enerjinin Korunum Yasası

Korunumsuz kuvvetler bir potansiyel enerji fonksiyonu olarak ifade edilemezler. Buna rağmen yapılan etkiyi Kinetik ve Potansiyel Enerji dışında farklı bir tür enerji olan **İÇ Enerji** ile ifade edebiliriz. Örnek olarak, fen yapıp durab bir arabanın lastikleri ısınır, bu korunumsuz sürtünme kuvvetinin yaptığı iş, sistemin iç enerjisini arttırır.

Matematiksel olarak iç Enerjideki değişimi

$$\triangle U_{ic} \equiv -W_{diger} \tag{7.9}$$

olarak tanımlarsak, Toplam enerjideki değişimi

$$\begin{aligned} U_1 + KE_1 + W_d &= U_2 + KE_2 \\ W_d &= U_2 - U_1 + KE_2 - KE_1 \\ -\triangle U_{ic} &= \triangle U + \triangle KE \\ \triangle U + \triangle KE + \triangle U_{ic} &= 0. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Bu bulduğumuz son ifade **en genel ENERJİ KORUNUM YASASI**'dır. Bir sistemin potansiyel, kinetik ve iç enerjilerinin her zaman değişebileceği ama toplam enerjinin sabit kalacağına hükmeder. O halde ENERJİ asla yokedilemeyen fakat şekil değiştirebilen bir fiziksel niceliktir.

7.4 Kuvvet ve Potansiyel Enerji Arasındaki İlişki

Uygun koordinat ekseni ve referans noktası seçimiyle

- m kütleli bir cisme etkiyen yerçekim kuvveti $\vec{F}(y) = -mg\hat{j}$ ve potansiyel enerji $U(y) = mgy$.

İdeal bir yayda uygun koordinat ekseni seçimiyle

- Elastik kuvvet yaya bağlı kütleye $\vec{F}(x) = -kx\hat{i}$ kuvveti uygularken cismin potansiyel enerjisi $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$'dir.

Korunumlu bir kuvvetin yaptığı iş W; potansiyel enerjisindeki değişim $-\triangle U$'ya eşittir. Bu kuvvetlerde $\triangle r$ kadar yerdeğiştirme olduğunu düşünürsek yapılan işi

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \triangle \vec{r} &= -\triangle U \\ \vec{F} &= -\frac{\triangle U}{\triangle \vec{r}} \\ \vec{F} &= -\vec{\nabla} U \\ &= -\frac{dU}{dx}\hat{i} - \frac{dU}{dy}\hat{j} - \frac{dU}{dz}\hat{k} \end{aligned} \tag{7.11}$$

Böylelikle eğer biz bir potansiyel enerji fonksiyonu biliyorsak buna sebep olan korunumlu kuvveti bulabiliriz. Yay ve kütleçelim potansiyel enerjilerini kullanarak kuvvetlere ulaşalım.

1. Yeçekim Potansiyel Enerjisi

$$\begin{aligned} U(y) &= mgy \\ \vec{F}(x,y,z) &= -\frac{d}{dx}(mgy)\hat{\imath} - \frac{d}{dy}(mgy)\hat{\jmath} - \frac{d}{dz}(mgy)\hat{k} \\ \vec{F}(x,y,z) &= -mg\hat{\jmath} \end{aligned}$$

2. Elastik Potansiyel Enerji

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1}{2}kx^2 \\ \vec{F}(x,y,z) &= -\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{2}kx^2\Big)\hat{\imath} - \frac{d}{dy}\Big(\frac{1}{2}kx^2\Big)\hat{\jmath} - \frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{2}kx^2\Big)\hat{k} \\ \vec{F}(x,y,z) &= -(kx)\hat{\imath}. \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 68. *Elektrik yüklü bir parçacık $x = 0$ noktasında hareketsizdir. Eş yüklü ikinci bir parçacık ise x ekseni boyunca serbest hareket edebilmektedir. Sistemin elektriksel potansiyel enerjisi C pozitif bir katsayı olmak üzere $U(x) = \frac{C}{x}$'dir. Hareket eden parçacığa etkiyen elektriksel kuvveti bulunuz.*

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{C}{x} \\ \vec{F}(x,y,z) &= -\frac{d}{dx}\Big(\frac{C}{x}\Big)\hat{\imath} - \frac{d}{dy}\Big(\frac{C}{x}\Big)\hat{\jmath} - \frac{d}{dz}\Big(\frac{C}{x}\Big)\hat{k} \\ \vec{F}(x,y,z) &= -\Big(-\frac{C}{x^2}\Big)\hat{\imath} \\ \vec{F}(x,y,z) &= \frac{C}{x^2}\hat{\imath}. \end{aligned}$$

Bunu biz Coulomb yasasına göre tam olarak $\vec{F}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{x^2}\hat{\imath}$ ile biliyoruz.

Örnek 69. *Herhangi korunumlu bir kuvvete ait Potansiyel Enerji Fonksiyonu*

$$U(x,y) = \frac{1}{2}k(x^2+y^2)$$

ile veriliyor olsun. Kuvvet vektörünü ve şiddetini bulunuz.

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \frac{1}{2}k(x^2+y^2) \\ \vec{F}(x,y,z) &= -\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{2}k(x^2+y^2)\Big)\hat{\imath} - \frac{d}{dy}\Big(\frac{1}{2}k(x^2+y^2)\Big)\hat{\jmath} - \frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{2}k(x^2+y^2)\Big)\hat{k} \\ \vec{F}(x,y,z) &= -(kx)\hat{\imath} - (ky)\hat{\jmath} \\ |\vec{F}(x,y,z)| &= k\sqrt{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

7.5 ÖDEV SET 7

1. Bir öğrenci, kütlesi $2,0$ kg olan fizik ders kitabını, pencereden 10 m aşağıda yerde olan arkadaşına yakalaması için bırakır. Yer seviyesi sıfır potansiyel alındığında,

   (a) kitabın başlangıç potansiyel yerçekim enerjisi nedir? $(196J)$

   (b) Yerdeki öğrencinin elleri yerden $1,5$ m yukarıda ise, kitabı yakalamadan hemen önceki kinetik enerjisi ve hızı nedir? $(166J; 12,9m/s)$

2. Uzunluğu l olan kütlesi ihmal edilebilir ince bir çubuk, bir ucundan geçen eksene göre düşey düzlemde sürtünmesiz dönebilme özelliğine sahiptir. Çubuğun diğer ucuna m kütleli bir kurşun top asılmıştır. Sistem yana doğru θ açısı kadar çekilir ve bırakılır. Kurşun top en alt seviyeden geçerken hızı ne olur? $l = 2,0m$ ve $\theta = 30^o$ alınız ve yanıtınızı sayısal olarak da ifade ediniz. $(v = 2,29m/s)$

3. Bir cisim, yüksekliği $12,5m$ olan uçurumun kenarından yatay düzlemden 41° yukarı doğrultuda $150m/s$'lik ilk hız ile atılır.

   (a) Cismin, yere çarpmadan hemen önce hızının büyüklüğünü eğik atış yöntemiyle hesaplaynız.

   (b) Aynı yanıtı, enerji korunumu prensibini kullanarak bulunuz.

4. Hareketsiz olan iki kütle, birbirlerine ip ve makara yardımı ile bağlıdır. Makara ve ipin ağırlıksız ve sürtünmesiz olduğunu varsayınız. m_1 kütlesi ile altındaki yatay düzlem arasındaki kinetik sürtünme katsayısını μ alarak, kütleler L kadar yol aldığında, kütlelerin ortak hız büyüklüğünün

   $v = \left[\frac{2(m_2-\mu m_1)gL}{m_1+m_2}\right]^{1/2}$ olduğunu gösteriniz.

5. Kuvvet sabiti $120N/m$ olan sıkıştırılmış bir yay, kütlesi $3,0kg$ olan bir cisime serbest bırakıldığında etkiyerek hareketine neden oluyor. Cisim, yayı terk ettikten sonra yatay düzlem üzerinde yol alıyor. Cisimle yüzey arasındaki sürtünme katsayısı $0,20$ olup cisim $8,0m$ yol aldıktan sonra duruyor.

   (a) Cismin maksimum kinetik enerjisi nedir? $(K_{mak} = 47J)$

   (b) Yay serbest bırakılmadan önce ne kadar sıkıştırılmıştır? $(0,89m)$

6. Başlangıçta hareketsiz olan $520,0$ kg'lık kaya kütlesi, heyelan sırasında 500 m uzunluğunda ve 300 m yüksekliğindeki yamaçtan aşağı doğru kayar. Yüzeyler arasındaki kinetik sürtünme katsayısı $0,25$ dir.

   (a) Kaya kütlesinin kinetik enerjisi, yamacın dibine geldiğinde nedir? $1,02MJ$

   (b) Kayma sırasında sürtünme kuvvetinin kaya kütlesi üzerinde yaptığı iş nedir? $(-0,51MJ)$

7. Uzunluğu l olan bir basit sarkacı düşünün. Sarkacın ipi düşey doğrultuda θ_0 açısı yaptığı anda, ipin serbest ucundaki m kütlesinin hızı v_0 dır.

   (a) m kütlesi en alt noktadan geçerken sahip olduğu hızı,

   (b) ipin yatay konuma gelebilmesi için v_0'ın minimum değerini ve

   (c) ipin düşey konuma gelebilmesi için v_0'ın minimum değerini bulunuz.

8. Bir vadinin iki yanında, doruğu karla kaplı iki tepenin yükseklikleri $850m$ ve $750m$ dir. Yüksek olanın doruğundan başlayıp alçak olanın doruğunda son bulacak bir kayak yarışması düzenleniyor. Yarış pistinin uzunluğu $3000m$'dir.

   (a) Başlangıçta duran bir kayakçı, yüksek doruktan başlayarak, hiç bir hız azaltması yapmadan alçak doruğa ulaştığında sahip olduğu hız ne olur? (sürtünmeyi ihmal ediniz.)

   (b) İkinci doruğa ancak ulaşmasını sağlayacak kadar bir sürtünme olduğunu düşünerek sürtünme katsayısını bulunuz.

9. Kütlesi m olan bir blok, eğik düzlemin alt ucundan yukarı doğru v_i ilk hızı ile atılır. Blok, düzlem üzerinde h maksimum yüksekliğine erişir ve tekrar geri kayar. Blok, eğim açısı θ olan eğik düzlemin alt ucuna v_s hızı ile gelir. Sürtünme katsayıları μ_s ve μ_k bilinmediğine göre

   (a) h'ı , v_i, v_s ve g'nin fonksiyonu olarak bulunuz.

   (b) μ_k'yı v_i, v_s ve θ'nın fonksiyonu olarak bulunuz.

   (c) μ_s için ne türlü limitler konabilir?

10. Ağırlığı w olan bir taş düşey doğrultuda yukarı doğru v_0 ilk hızı ile atılır. Taş, havada kaldığı sürede, sabit bir f hava direnci etkisinde hareket eder. Taşın

    (a) çıkabileceği maksimum yüksekliğin $h = \frac{v_0^2}{2g(1+f/w)}$ olduğunu

    (b) yere çarpma anındaki süratinin $v = v_0\left(\frac{w-f}{w+f}\right)^{1/2}$ olduğunu gösteriniz.

Chapter 8

MOMENTUM, İTME ve ÇARPIŞMA

Dinamik(kuvvet) ile ilişkili fakat Newton'un ikinci yasasıyla açıklanamayan fiziksel süreçler vardır. Örneğin bir tır, derse yetişmeye çalışan ve bu yüzden ters yönde ilerleyen bisikletli fizik öğretim üyesine çarparsa ne olur? Tırın kütlesi ile bisikletlinin kütleleri birbirinden oldukça farklıdır. Bu tip olayları açıklamak için yeni fiziksel niceliklere ihtiyaç duyarız.

8.1 Momentum ve İtme

m kütleli bir parçağın ivmesi $\vec{a}$ olsun. İvme hızın zaman göre değişimidir, dolayısıyla Newton'un ikinci yasasını şöyle de yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{net} &= m\vec{a}(t) \\ &= m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\Big(m\vec{v}(t)\Big). \end{aligned}$$

Burada kütlelin zamanla değişmediğini kabul ediyoruz. Yeni fiziksel niceliğimizi

$$\vec{p}(t) \equiv m(t)\vec{v}(t) \tag{8.1}$$

Momentum olarak adlanıracağız. Bu fiziksel nicelik **vektörel** bir büyüklüktür. Kütle ile hız vektörlerinin çarpımından oluşur. En genel olarak ne kütle ne de hız vektörü zamandan bağımsız sabit olmak zorunda değildir. Bu yüzden kütleye de zaman bağımlılığı eklenir. "MKS" sisteminde Birimi ise kgm/s'dir.

Newton'un ikinci yasasının EN GENEL TANIMI MOMENTUM yardımıyla verilir. Bir cismin momentumundaki değişimler üzerine uygulanan net kuvvetlerle ilişkilidir.

$$\sum \vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} \tag{8.2}$$

Bileşenler cinsinden momentum vektörü

$$\begin{aligned} p_x(t) &= m(t)v_x(t) \\ p_y(t) &= m(t)v_y(t) \\ p_z(t) &= m(t)v_z(t). \end{aligned}$$

8.2 İtme

Dinamik incelerken iki birbirine benzer fiziksel nicelikle karşılaştık. Birincisi parçacığın momentumu diğeri ise kinetik enerjisi. ikisi de kütleye bağlı, momentum hız vektörüne lineer bağlı vektörel bir nicelikken, Kinetik Enerji hız vektörünün karesine bağlı skaler bir niceliktir. Aralarındaki ilişkiyi tam olarak anlayabilmek için momentuma çok benzeyen yeni bir nicelik olan **itme(impuls)**'yi inceleyelim.

Belirli bir zaman aralığında $\triangle t \equiv t_2 - t_1$ *sabit* bir $\sum \vec{F}_{net}$ kuvvet etkisinde kalan m kütleli bir parçacığı düşünelim. Bu parçacığın maruz kaldığı **Net İtme(impuls)** $\vec{J}$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\vec{J}(\triangle t) \equiv \sum \vec{F}_{net} \times (t_2 - t_1) \tag{8.3}$$

İtme nin vektörel bir büyüklüktür, net kuvvet vektörü ile aynı yöndedir. MKS birim sisteminde birimi $Ns = kgm/s$ olarak verilir.

8.2.1 İtme ne işe yarar?

t_1 zamanındaki parçacığın momentumu $\vec{p}(t_1)$; t_2 anında ise parçacığın momentumu $\vec{p}(t_2)$ ise; bu zaman aralığındaki momentumundaki değişim $\triangle\vec{p}(t_2 - t_1) = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)$ ile verilir. Sisteme yine bu zaman aralığında etki eden sabit net kuvveti yazarsak

$$\sum \vec{F}_{net} = \frac{\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)}{(t_2 - t_1)}$$

O halde itme vektörü

$$\begin{aligned} \vec{J}(\triangle t) &= \sum \vec{F}_{net} \times (t_2 - t_1) \\ &= \frac{\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)}{(t_2 - t_1)} \times (t_2 - t_1) \\ \vec{J}(\triangle t) &= \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) \end{aligned} \tag{8.4}$$

aynı zaman aralığındaki momentum değişikliğine eşit olur.

8.3 İtme-Momentum Teoremi

Bir parçacığın belirli bir zaman aralığındaki momentum değişimi, aynu zaman aralığındaki parçacık üzerine etkiyen net kuvvetin itmesidir. Buna **İtme-Momentum Teoremi** denir.

İtme momentum teoremi belirli zaman aralığında kuvvet sabit olsa da olmasa da geçerlidir. Yukarıda zaman aralığında sabit net kuvvet için bunu ispatlamıştık. Şimdi genelleştirelim; Newton'un ikinci yasasına göre

$$\sum \vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} \tag{8.5}$$

Bu zaman içinde değişken kuvveti tüm zaman üzerinden toparlarsak

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}_{net} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}(t)}{dt} dt \\ &= \int_{\vec{p}(t_1)}^{\vec{p}(t_2)} d\vec{p}(t) \\ \vec{J}(t_2 - t_1) &= \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) \end{aligned} \tag{8.6}$$

elde edilir. Burada itmeyi ise en genel olarak

$$\vec{J}(t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}_{net} dt \tag{8.7}$$

tanımladığımıza dikkat ediniz. Kuvvet zaman içinde değişken olsa bile, bir zaman aralığında ortalama değerini bilirsek itmeyi yine de tanımlayabiliriz.

$$\vec{J}(t_2 - t_1) = \vec{F}_{ort-net} \times (t_2 - t_1) \tag{8.8}$$

Örnek 70. *Bir Futbol topuna ayakla vurduğumuzu düşünelim. Topa uyguladığımız kuvvet zaman içinde sürekli değişecektir. Topa ayağın ilk değdiği an itibariyle topta bir şekil değişikliği olacak belirli bir andan sonra büzülen top yüzeyi tekrar genişleyerek ayaktan ayrılacaktır. İşte bütün bu süreç içindeki verilen itme kuvvet zaman grafiğinin altındaki alanların toplamıdır.*

İtme vektörünün en genel halini bileşenler cinsinden yazarsak

$$|\vec{J}_x(t_2 - t_1)| = \int_{t_1}^{t_2} |\sum \vec{F}_{x-net}| dt = |\vec{p}_x(t_2) - \vec{p}_x(t_1)| \tag{8.9}$$

$$|\vec{J}_y(t_2 - t_1)| = \int_{t_1}^{t_2} |\sum \vec{F}_{y-net}| dt = |\vec{p}_y(t_2) - \vec{p}_y(t_1)| \tag{8.10}$$

$$|\vec{J}_z(t_2 - t_1)| = \int_{t_1}^{t_2} |\sum \vec{F}_{z-net}| dt = |\vec{p}_z(t_2) - \vec{p}_z(t_1)| \tag{8.11}$$

8.3.1 Momentum ile Kinetik Enerjinin Karşılaştırılması

Şimdiye kadar iki önemli teorem öğrendik, bunlar:

İtme-Momentum Teoremi: Bir parçacığın momentumundaki değişim, üzerine etkiyen net kuvvetin o zaman aralığındaki yarattığı itmedir.

İş-Enerji Teoremi: Bir parçacığın üzerinde net kuvvetin belirli bir yerdeğişim altında yaptığı iş, Kinetik Enerjisindeki değişimdir.

Örnek 71. *Durağan durumdan harekete başlayan bir parçacığı düşünelim.*
$t_1 = 0s$*'de*
hızı
$\vec{v}(t_1) = 0(m/s)$
ve mometumu
$\vec{p}(t_1) = 0(kgm/s)$
Kinetik Enerjisi
$KE_1 = 0J$*'dür.*
Parçacığa $t_2 = t$ *anına kadar sabit bir* $\vec{F}$ *net kuvveti etkirse ve bu süre zarfında* $\triangle\vec{r}$ *yer değiştirirse hızı*
$\vec{v}(t) \neq 0(m/s)$
ve mometumu
$\vec{p}(t) \neq 0(kgm/s)$
Kinetik Enerjisi
$KE_2 \neq 0J$*'dür.*
itme
$\vec{J}(t) = \left[\vec{p}(t) - 0\right] = \vec{F} \times (t - 0)$
olur. Kuvvetin yaptığı toplam iş
$\vec{F} \cdot \triangle\vec{r} = KE_2$
kinetik enerjisindeki değişimdir.

Örnek 72. *A topu* $500g$ *kütleli bir top* $v_A = 4,0(m/s)$ *süratle ilerlerken, B topu* $100g$ *kütleyle* $v_B = 20,0(m/s)$ *süratle ilerlerken bir çocuk tarafından tutulmak istenmektedir. Hangi top daha* ***kolay*** *yakalanır?*

Örnek 73. *Tuğla bir duvara karşı* $0,40kg$*'lık bir topu fırlatıyoruz. Top yatay yönde sola doğru giderken* $30(m/s)$ *süratle duvara çarpıp gene yatay yönde* $20(m/s)$ *süratle geri geliyor.*

1. *Topun duvara çarpma anundaki topa etkiyen net kuvvetin itmesi nedir?*
2. *Top* $0,010s$ *boyunca duvarla temas ediyorsa, duvarın topa uyguladığı ortalama yatay kuvvetin şiddetini bulunuz.*

Örnek 74. *Bir topun kütlesi* $0,40kg$*'dır. Başlangıçta sola doğru* $20(m/s)$ *gitmekteyken, bir futbolcu topun gelişine vurarak ters yöne yatayla* 45 *derecelik açı yaptırarak topu yolluyor. Topun ayakla teması* $0,010s$ *sürüyor ve hareket bitiminde sürati* $30(m/s)$ *oluyor.*

1. *Net kuvvetin itmesini bulunuz.*
2. *Ortalama net kuvveti bulunuz.*

8.4 Momentumun Korunumu

Sadece birbiriyle etkileşen iki cismin bulunduğu ideal bir sistem olsun. Bu sistemde bir parçacığın diğerine uyguladığı kuvvete **iç kuvvet** denir. Sistem dışından bir parçacığa uygulanan kuvvete ise **dış kuvvet** denir.

- B cisminin A cismine uyguladığı kuvvet $\vec{F}_{B/A}$,
- A cisminin B cismine uyguladığı kuvvet $\vec{F}_{A/B}$.

olsun, Sistem izole yani iyi yalıtılmış olsun (korunumlu sistem, bir başke değişle dış kuvvet etkilemiyor).

- B cisminin A cisminde yarattığı etki $\vec{F}_{B/A} = \frac{d\vec{p}_A}{dt}$,
- A cisminin B cisminde yarattığı etki $\vec{F}_{A/B} = \frac{d\vec{p}_B}{dt}$,

momentum değişimlerine sebep olur. Newton'un üçüncü yasasına göre ise

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{B/A} &= -\vec{F}_{A/B} \\
\frac{d\vec{p}_A}{dt} &= -\frac{d\vec{p}_B}{dt} \\
\frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} &= 0 \\
\frac{d\vec{p}_{top}}{dt} &= 0
\end{aligned} \tag{8.12}$$

Burada sistemin toplam momentumunu $\vec{p}_{top} = \vec{p}_A + \vec{p}_B$ tanımladık. Toplam momentum zaman içinde değişmediğine göre, bir **Hareket Sabiti**'dir.

Kısacası sistemin toplam momentumu dış kuvvetin yokluğunda her zaman KORUNUR. Bu ifade momentumun korunum ilkesidir. Bileşenler cinsinden de bu korunum yazılabilinir.

$$\begin{aligned}
\vec{p} &= \vec{p}_A + \vec{p}_B + \cdots \\
&= m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B + \cdots \\
|\vec{p}_x| &= m_A|\vec{v}_{Ax}| + m_B|\vec{v}_{Bx}| + \cdots \\
|\vec{p}_y| &= m_A|\vec{v}_{Ay}| + m_B|\vec{v}_{By}| + \cdots \\
|\vec{p}_z| &= m_A|\vec{v}_{Az}| + m_B|\vec{v}_{Bz}| + \cdots
\end{aligned}$$

$|\vec{p}_x|$, $|\vec{p}_y|$ ve $|\vec{p}_z|$ her zaman sabit kalır.

Örnek 75. *Bir nişancı* $m_T = 3,00kg$ *kütleli bir tüfeği geri tepecek şekilde tutuyor.* $m_K = 5,00g$ *kütleli bir mermi yere göre* $v_k = 300m/s$ *süratle ateşleniyor.*

1. *Tüfeğin geri tepme sürati nedir?*
2. *Mermi ve tüfeğin son momentumu nedir?*
3. *Mermi ve tüfeğin son kinetik enerjisi nedir?*

Örnek 76. *İki kütle sürtünmesiz bir hava rayı üzerinde birbirlerine doğru hareket ediyorlar.* $m_A = 0,50kg$ *ve* $2,0m/s$ *süratle,* $m_B = 0,30kg$ *ve* $2,0m/s$ *süratle hareket etsinler. Çarpışmadan sonra B kütlesinin hızı ters yöne doğru* $2,0m/s$ *olduğuna göre*

1. *A kütlesinin son hızı nedir?*
2. *Her iki kütlenin momentum ve hızlarının değişimini birbirleriyle kıyaslayınız.*

Örnek 77. *İki cisim sürtünmesiz bir yüzeyde hareket ediyorlar.* $20kg$ *kütleli A cismi pozitif-x doğrultusunda* $2,0(m/s)$ *süratle ilerleyip duran* $12kg$ *kütleli B cismine çarpıyor. Çarpısmadan sonra A cismi pozitif-x ekseniyle* 30 *derecelik açı yaparak* $1,0(m/s)$ *hızla ilerlerken*

1. *B cisminin hızını bulunuz.*
2. *B cisminin süratini bulunuz.*

8.5 Momentum Korunumu ve Çarpışmalar

Cisimler çarpışırken aralarındaki etkileşmeler, dış etkileşmelerden şiddetli ise dış etkileşmeler ihmal edilir ve sistem yalıtılmış(korunumlu) olarak kabul edilebilinir. Dış kuvvetin yokluğunda her zaman **TOPLAM MOMENTUM KORUNUR.**

8.5.1 Esnek Çarpışma(EÇ):

Cisimler arasındaki kuvvetler(etkileşmeler) korunumlu ise, sistemin **toplam KE'si değişmez.** Bu tip çarpışmalara **Esnek Çarpışmalar** denir.

8.5.2 Esnek Olmayan Çarpışma(EOÇ):

Çarpışmadan önceki toplam kinetik enerji, çarpışmadan sonraki toplam kinetik enerjiden büyük ise bu tip çarpışmalara **Esnek Olmayan Çarpışmalar** denir.

8.5.3 Hiç Esnek Olmayan Çarpışma(HEOÇ):

Çarpışmadan sonraki iki cisim birbirine kenetlenip tek cisim gibi hareket ediyorsa, bu tip çarpışmalara **Hiç Esnek Olmayan Çarpışmalar** denir. KE korunmaz.

Her *EOÇ*, bir *HEOÇ* değildir. Örnek olarak bazen iki araba çarpışıp geri teper ve dururlar. Bazen ise iki araba birbirine kenetlenip sürüklenip dururlar. Bu çarpışmalardan ilki EOÇ, ikincisi ise HEOÇ'dır.

Örnek 78. *HEOÇ durumu için KE kaybının her şartta oluşacağını ispat ediniz.*

Diyelim ki m_A kütleli cisim sürtünmesiz bir düzlemde seçtiğimiz bir boyutta ve pozitif yönde $\vec{v}_{A1} = v_{A1}\hat{i}$ hızıyla, m_B kütleli cisim ise sürtünmesiz bir düzlemde seçtiğimiz pozitif yönün tersine $\vec{v}_{B1} = -v_{B1}\hat{i}$ hızıyla hareket etsin. HEOÇ'dan hemen sonra kenetlenmiş cisimler $\vec{v}_T$ hızı ile hareket etsin. Her durumda geçerli olacak olan momentum korunumu bize

$$\begin{aligned} m_A\vec{v}_{A1} + m_B\vec{v}_{B1} &= (m_A + m_B)\vec{v}_T \\ (m_A v_{A1} - m_B v_{B1})\hat{i} &= (m_A + m_B)\vec{v}_T \\ \vec{v}_T &= \frac{(m_A v_{A1} - m_B v_{B1})}{(m_A + m_B)}\hat{i}. \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi HEOÇ'dan sonraki hız vektörü ilk momentumlar tarafından belirlenmektedir. Sistemin ilk ve son toplam kinetik enerjilerini yazalım:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B1}^2 &\overbrace{=}^{?} \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_T^2 \\ m_A v_{A1}^2 + m_B v_{B1}^2 &\overbrace{=}^{?} (m_A + m_B)\frac{(m_A v_{A1} - m_B v_{B1})^2}{(m_A + m_B)^2} \\ &\overbrace{=}^{?} \frac{(m_A v_{A1} - m_B v_{B1})^2}{(m_A + m_B)} \\ m_A^2 v_{A1}^2 + m_B^2 v_{B1}^2 + m_A m_B(v_{A1}^2 + v_{B1}^2) &\overbrace{=}^{?} m_A^2 v_{A1}^2 - 2m_A m_B(v_{A1}v_{B1}) + m_B^2 v_{B1}^2 \\ m_A m_B(v_{A1}^2 + v_{B1}^2 + 2v_{A1}v_{B1}) &\overbrace{=}^{?} 0 \end{aligned}$$

Bu eşitliğin sağlanabilmesi için

- $m_A m_B = 0$ veya
- $(v_{A1} + v_{B1})^2 = 0$

olmalıdır. Bu çözümler ancak kütlelerin birinin sıfır olması veya süratlerin negatif olmasıyla mümkün olabilir. Ne kütleler nede süratler bu şartları sağlayamazlar. Sürat negatif olsa bile mutlak değerleri aynı olacağı için cisimler birbirlerine hiç yaklaşamazlar. Dolayısıyla Kinetik Enerji Korunumu olmayacağı açıkca ispat edilmiş olur.

Ev ödevi 19. *Yukarıdaki problemi B cisminin ilk hızını sıfır alarak daha da kolay çözebilirsiniz. Unutmayın bu kolay çözüm yine bir özel çözümdür.*

Örnek 79. *İki kütle sürtünmesiz bir hava rayı üzerinde birbirlerine doğru hareket ediyorlar.* $m_A = 0,50kg$ *ve* $2,0m/s$ *süratle,* $m_B = 0,30kg$ *ve* $2,0m/s$ *süratle hareket etsinler. Çarpışmadan HEOÇ olduğuna göre,*

1. *Ortak hızı nedir?*
2. *Sistemin başlangıç ve son KE'lerini hesaplayın.*

Örnek 80. *Bir merminin süratini ölçmek için bir sistem kurulsun, öyle ki* m_k *kütleli mermi* v_1 *süratiyle ilerleyip tavana kütlesiz bir iple asılı bulunan* m_T *kütleli bir tahtaya HEOÇ ile saplanıyor. Çarpışmadan sonra tahta ve mermi beraber ilk konumuna göre y kadar yükseliyor. Merminin ilk süratini verilenler cinsinden bulunuz.*

Örnek 81. *Kuzey yönüne doğru* $15(m/s)$ *sürat ile ilerleyen* $1000kg$ *kütleli bir araba, doğu yönüne doğru* $10(m/s)$ *süratle ilerleyen* $2000kg$*'lık kamyonet ile çarpışıyor. Can kaybının olmadığı çarpışmanın ardından araçlar iç içe geçip beraber hareket ederek bir noktada duruyorlar.*

1. *Enkazın hızını bulunuz.*
2. *Enkazın süratini bulunuz.*

8.6 Esnek Çarpışmalar(EÇ):

Esnek çarpışmalarda hem momentum hemde KE'nin korunduğunu hatırlattıktan sonra tek boyutta bir esnek çarpışmayı inceleyelim. m_A kütleli bir cisim $\vec{v}_{A1}$ hızıyla, m_B kütleli ve $\vec{v}_{B1}$ hızıyla giden diğer bir cisme EÇ yapsın. Çarpışmadan sonraki hızları $\vec{v}_{A2}$ ve $\vec{v}_{B2}$ olsun.

- Momentum Korunumu

$$m_A\vec{v}_{A1} + m_B\vec{v}_{B1} = m_A\vec{v}_{A2} + m_B\vec{v}_{B2} \tag{8.13}$$

- KE Korunumu

$$\frac{1}{2}m_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B1}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B2}^2. \tag{8.14}$$

eşitliklerini bize verir. Bu en genel halde daha özel bir duruma gidelim ve diyelim ki

- m_B kütleli cisim ilk başta hareketsiz olsun.
- m_A kütleli cisim pozitif-x yönünde hareket ederek, durgun B cismine çarpsın.
- EÇ sonucunda m_A kütleli cisim geri sekerken, durgun kütleli cisim pozitif yönde hareketine devam etsin.

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{A1} &= v_{A1}\hat{i} \\
\vec{v}_{B1} &= 0 \\
\vec{v}_{A2} &= -v_{A2}\hat{i} \\
\vec{v}_{B2} &= v_{B2}\hat{i}
\end{aligned}$$

Momentum korunumu

$$m_A v_{A1}\hat{i} = -m_A v_{A2}\hat{i} + m_B \vec{v}_{B2}\hat{i}$$

KE korunumu

$$\frac{1}{2}m_A v_{A1}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B2}^2.$$

Amacım son hızları ilk hız cinsinden bulmak olsun.

$$\begin{aligned}
m_A\Big(v_{A1}^2 - v_{A2}^2\Big) &= m_B v_{B2}^2 \\
m_A\Big(v_{A1} - v_{A2}\Big)\Big(v_{A1} + v_{A2}\Big) &= m_B v_{B2}^2
\end{aligned}$$

momentum korunumundan

$$m_A\Big(v_{A1} + v_{A2}\Big) = m_B v_{B2}$$

kullanırsak

$$\begin{aligned}
m_A\Big(v_{A1} - v_{A2}\Big)\Big(v_{A1} + v_{A2}\Big) &= m_B v_{B2}^2 \\
m_B v_{B2}\Big(v_{A1} - v_{A2}\Big) &= m_B v_{B2}^2 \\
\Big(v_{A1} - v_{A2}\Big) &= v_{B2}.
\end{aligned}$$

Bir diğer çözüm $m_B v_{B2} = 0$ olmasıdır, Bu çözüm ilk başta seçilen çözümle çelişmekte olduğu için göz ardı ediyoruz.

$$
\begin{aligned}
\left(v_{A1}+v_{A2}\right) &= \frac{m_B}{m_A}v_{B2} \\
\left(v_{A1}-v_{A2}\right) &= v_{B2} \\
\Rightarrow 2v_{A1} &= \left(\frac{m_B}{m_A}+1\right)v_{B2} \\
v_{B2} &= \frac{2m_A}{m_A+m_B}v_{A1} \\
\Rightarrow 2v_{A2} &= \left(\frac{m_B}{m_A}-1\right)v_{B2} \\
2v_{A2} &= \left(\frac{m_B-m_A}{m_A}\right)\frac{2m_A}{m_A+m_B}v_{A1} \\
v_{A2} &= \frac{m_B-m_A}{m_A+m_B}v_{A1}.
\end{aligned}
$$

Böylelikle çarpışmadan sonraki hızları çarpışmadan önceki hızlar cinsinden ifade etmiş olduk.

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_{A2} &= -\frac{m_B-m_A}{m_A+m_B}v_{A1}\hat{i} \\
&= \frac{m_A-m_B}{m_A+m_B}v_{A1}\hat{i} \qquad (8.15) \\
\vec{v}_{B2} &= \frac{2m_A}{m_A+m_B}v_{A1}\hat{i} \qquad (8.16)
\end{aligned}
$$

8.6.1 Özel Durumlar

1. $m_A < m_B$ durumunda

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_{A2} &= \frac{m_A-m_B}{m_A+m_B}v_{A1}\hat{i} \\
\vec{v}_{A2} &\propto -\vec{v}_{A1}
\end{aligned}
$$

   olur, yani m_A kütleli cisim kendinden daha büyük kütleli ama durgun halde bulunan m_B cismine çarptığında **geri seker**. m_B kütleli cisim de belirli bir süratle hareket eder.

2. $m_A \ll m_B$ durumunda

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_{A2} &= \frac{m_A-m_B}{m_A+m_B}v_{A1}\hat{i} \\
\vec{v}_{A2} &\simeq -\vec{v}_{A1}.
\end{aligned}
$$

   olur, yani m_A kütleli cisim kendinden daha büyük kütleli ama durgun halde bulunan m_B cismine çarptığında **neredeyse** aynı süratle geri geri seker. m_B kütleli cisim de hemen hemen hareketsiz kalır.

3. $m_A > m_B$ durumunda

$$\begin{aligned}\vec{v}_{A2} &= \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_{A1}\hat{i} \\ \vec{v}_{A2} &\propto \vec{v}_{A1}\end{aligned}$$

olur, yani m_A kütleli cisim kendinden daha küçük kütleli ama durgun halde bulunan m_B cismine çarptığında, momentumu büyük olduğu için diğer kütleyi de önüne alarak **aynı yönde hareketine devam eder**, m_B kütleli cisim de belirli bir süratle hareket eder.

4. $m_A \gg m_B$ durumunda

$$\begin{aligned}\vec{v}_{A2} &= \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_{A1}\hat{i} \\ \vec{v}_{A2} &\simeq \vec{v}_{A1}.\end{aligned}$$

olur, yani m_A kütleli cisim kendinden çok çok daha küçük kütleli ama durgun halde bulunan m_B cismine çarptığında **neredeyse** aynı süratle hareketine devam eder. m_B kütleli cisim de kendisine çarpan cismin iki kat süratiyle hareket eder.

5. $m_A = m_B$ eş kütleler durumunda

$$\begin{aligned}\vec{v}_{A2} &= \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_{A1}\hat{i} \\ \vec{v}_{A2} &= 0 \\ \vec{v}_{B2} &= \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_{A1}\hat{i} \\ \vec{v}_{B2} &= v_{A1}\hat{i}\end{aligned}$$

olur, yani hareketli kütle tüm momentumunu durgun haldeki kütleye bırakır ve kendisi durgun hale geçer.

8.6.2 Esnek Çarpışma ve Göreceli Hız

Önceki bölümde kütlesi birbirinden farklı fakat biri durağan iki cismin esnek çarpışmasında süratler arasında

$$\begin{aligned}v_{A1} - v_{A2} &= v_{B2} \\ v_{A1} &= -\Big(v_{A2} - v_{B2}\Big)\end{aligned}$$

gibi bir ilişki elde ettik. $v_{B1} = 0$ olduğundan bunu

$$\Big(v_{A1} - v_{B1}\Big) = -\Big(v_{A2} - v_{B2}\Big)$$

gibi de yazabiliriz. Daha da genel olarak söylemek gerekirse, ikinci cisim durağan olmasa da bu ifade geçerli olurdu. Bunun ispatı biraz uzun olduğu için burada yapmıyoruz.

Bu ifade göreceli hız gibidir. Çarpışmadan önce ve sonra aynı büyüklüğe sahip fakat zıt işaretlidir. Bunu daha da genel olarak şöyle ifade ederiz.

Esnek çarpışmada, düz çizgi boyunca iki cismin çarpışmasında cisimlerin birbirlerine olan göreceli hızları, çarpışmadan önce ve sonra aynı şiddetlidir, sadece işaretleri değişir. Bu ifade en genel anlamda 3 boyutta da geçerlidir.

Örnek 82. *$m_A = 0,50kg$ ve $m_B = 0,30kg$ kütleli iki kütle hava rayı üzerinde EÇ yaparlar. Çarpışmadan önceki hızları $\vec{v}_{A1} = 2,0(m/s)\hat{i}$ ve $\vec{v}_{B1} = -2,0(m/s)\hat{i}$ dir. Çarpışmadan sonraki hızları nedir?*

Örnek 83. *Sürtünmesiz bir yüzeyde kayan iki diskten birincisinin kütlesi $m_A = 0,50kg$ ve ilk hızı $\vec{v}_{A1} = 4,0(m/s)\hat{i}$ dır. Durağan $m_B = 0,30kg$ diski ile kafa kafaya olmayan bir çarpışma gerçekleşiyor (anlamı çarpışma tek boyutta değil iki boyutt oluyor). Çarpışma sonrası m_A kütlesi bilinmeyen bir yöne $2,0(m/s)$ sürat ile savruluyor. m_B kütlesinin süratini ve her iki cismin çarpışmadan sonraki hız vektörlerini bulunuz.*

8.7 Kütle Merkezi

Birden fazla parçacığın oluşturduğu bir cismin kütle merkezi şöyle hesaplanır. Diyelim ki m_1 kütleli parçacığın konumu kartezyan koordinatlarda (x_1, y_1, z_1) ile verilsin. Benzer şekilde m_2 kütleli parçacık (x_2, y_2, z_2) noktasında olsun. Cismin N tane parçacıktan oluştuğunu düşünelim. Kütle merkezi

$$\begin{aligned} x_{km} &= \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \\ y_{km} &= \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \\ z_{km} &= \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \end{aligned}$$

Toplam kütle $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ tanımlarsak, kütle merkezinin konum vektörünü

$$\vec{r}_{km}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i(t)}{M}$$

Örnek 84. *En başit bir su molekülünü düşünelim. Oksijen atomunu koordinat ekseninin merkezine yerleştirelim. İki adet hidrojen atomunu ise aralarında* 105 *derece olacak ve simetrik olarak pozitif x ekseninin altına ve üstüne koyalım. Atomlar arası uzaklık* $d = 9,57 \times 10^{-11} m$ *olsun. Her Hidrojen atomunun kütlesi* $1u$*; Oksijen atomunun kütlesi* $16u$*'dur. Su molekülünün kütle merkezini bulunuz.*

Küp, Küre, Disk, Çember gibi simetrik cisimlerin **GEOMETRİK MERKEZİ** aynı zamanda **KÜTLE MERKEZİ'dir.** Silindir, dikdörtgen prizma gibi cisimlerin ise simetri eksenleri vardır. Bu eksen üzerindeki bir nokta Kütle Merkezleridir.

8.7.1 Kütle Merkezinin Hareketi

Kütle merkezinin konum vektörünü bildiğimize göre anlık hız vektörünü hemen yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \vec{r}_{km}(t) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i(t) \\ \vec{v}_{km}(t) &= \frac{d\vec{r}_{km}(t)}{dt} \\ \vec{v}_{km}(t) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i(t) \end{aligned}$$

Bu ifadeyi kullanarak hemen Sistemin TOPLAM MOMENTUMUNU, her alt parçacığın momentumlarının toplamı olarak yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\vec{P}_{km}(t) &= M\vec{v}_{km}(t) \\
&= \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i(t) \\
&= m_1\vec{v}_1(t) + m_2\vec{v}_2(t) + m_3\vec{v}_3(t) + \cdots + m_N\vec{v}_N(t) \\
&= \vec{p}_1(t) + \vec{p}_2(t) + \cdots + \vec{p}_N(t).
\end{aligned}$$

8.8 Dış Kuvvetler ve Kütle Merkezinin Hareketi

Momentumun zamana göre değişimi net dış kuvvet demekti.

$$\begin{aligned}
\sum \vec{F}_{net} &= \frac{d}{dt}\vec{P}_{km}(t) \\
\frac{d}{dt}\vec{P}_{km}(t) &= \frac{d}{dt}\Big[\vec{p}_1(t) + \vec{p}_2(t) + \cdots + \vec{p}_N(t)\Big] \\
\frac{d}{dt}\Big[M\vec{v}_{km}(t)\Big] &= \frac{d}{dt}\Big[m_1\vec{v}_1(t) + m_2\vec{v}_2(t) + m_3\vec{v}_3(t) + \cdots + m_N\vec{v}_N(t)\Big] \\
M\vec{a}_{km}(t) &= m_1\vec{a}_1(t) + m_2\vec{a}_2(t) + m_3\vec{a}_3(t) + \cdots + m_N\vec{a}_N(t)
\end{aligned}$$

Net kuvvet, sistemi oluşturan parçacıkların birbirleri ile etkileşmesi ve bu parçacıklara etkiyen dış kuvvetlerin toplamıdır.

$$\sum \vec{F}_{net} = \sum \vec{F}_{ic} + \sum \vec{F}_{dıs}$$

Newton'un üçüncü yasasına göre denge durumunda olan bir parçacık sistemin iç etkileşmeleri toplamı sıfırdır.

$$\begin{aligned}
\sum \vec{F}_{net} &= \sum \vec{F}_{ic} + \sum \vec{F}_{dıs} \\
&= \sum \vec{F}_{dıs} \\
\sum \vec{F}_{dıs} &= M\vec{a}_{km}(t)
\end{aligned}$$

Yani net dış kuvvet, sistemin kütle merkezinin ivmesiyle doğru orantılıdır. Örnek olarak bir top mermisi düşünelim, ateş edildikten sonra belirli bir menzilde parçalara ayrılır. Her parçanın konumunumu kütlesiyle çarpıpı ortalamasını alırsanız tek parça gideceği konumu bulacaktınız.

8.9 ÖDEV SET 8

1. Kütlesi $6000kg$ olan bir uzay aracı, güneşe göre $100m/s$'lik hız ile Jüpiter'e doğru giderken, roketlerini ateşler. Kütlesi $80kg$ olan gaz, uzay aracına göre $250m/s$'lik hız ile ters yönde atılır. Uzay aracının son hızı ne olur? cevap=**(103,4m/s)** $\hat{i}$

2. Bir demiryolu istasyonundaki platformun önünde kütlesi $2000kg$ olan ve raylarla arasındaki sürtünme olmayan bir üstü açık vagon hareketsiz durmaktadır. Kütlesi $100kg$ olan bir sporcu raylar arasında vagona doğru $10m/s$'lik hızla koşar ve vagona atlar atlamaz durur.

   (a) Vagonun hızı ne olur? cevap=**(0,48m/s)** $\hat{i}$

   (b) Sporcu, vagona göre $0,5m/s$'lik hız ile vagonun üzerinde arkadan öne yürürse, vagonun hızı ne olur? cevap=**(0,45m/s)** $\hat{i}$

3. Kütlesi $2000kg$ olan kamyon, kuzeye doğru $40km/h$ hızla hareket ederken, doğuya dönüyor ve hızlanarak $50km/h$'lik hıza ulaşıyor.

   (a) Kamyonun kinetik enerjisindeki değişme ne kadardır? cevap=**69,4kJ**

   (b) Kamyonun momentumundaki değişimin büyüklüğünü ve yönünü bulunuz. cevap=$3,54 \times 10^4 kgm/s, \tan\theta = (-\frac{2,22}{2,78})$

4. Kütleleri $2,0kg$ olan A ve B cisimleri çarpışıyor. Çarpışmadan önceki hızları $\vec{v}_A = (15\hat{i}+30\hat{j})m/s$ ve $\vec{v}_B = (-10\hat{i}+5,0\hat{j})m/s$ olarak, çarpışmadan sonraki hızları ise $\vec{v}'_A = (-5,0\hat{i} + 20\hat{j})m/s$ olarak veriliyor.

   (a) B'nin son hızı nedir? cevap $\vec{v}'_B = (10\hat{i} + 15\hat{j})m/s$

   (b) çarpışmada ne kinetik enerji ne olmuştur? cevap=$500J$ azalmıştır.

5. Kütlesi $5,2g$ olan bir mermi, $672m/s$'lik hız ile düzgün bir yüzey üzerinde duran $700g$'lık tahta bloğa çarpar ve $428m/s$'lik hız ile bloktan dışarı çıkar. Bloğun süratini bulunuz. cevap=$1,8m/s$

6. Bir elektron durmakta olan hidrojen atomuna esnek olarak çarpıyor. Hareket çarpışmadan önce ve sonra aynı doğrultuda olduğuna göre, elektron, kinetik enerjisinin ne kadarını hidrojen atomuna aktarır? Hidrojen atomunun kütlesi elektronun kütlesinin yaklaşık 1840 katıdır. cevap=$\%0,22$

7. Bir fil, $\vec{v}_F$ lik bir hız ile duran bir sineğe çarpıyor. Çarpışma esnek ise, sineğin hızı ne olur? Cevabı kütleleri ve filin hızı cinsinden vereceksiniz.

8. Sırasıyla batı ve güney yönünde hareket eden A ve B arabaları çarpışarak birbirlerine kenetleniyorlar. Ağırlıkları sırasıyla $4000N$ ve $4340N$'dur. Çarpışmadan önce $\vec{v}_A = 64km/h$ ve $\vec{v}_B = 96km/h$ hızla hareket etmektedir. Çarpışmadan hemen sonra ortak hızının büyüklüğü ve yönünü bulunuz.

Chapter 9

KATI CİSİMLERİN DÖNME HAREKETİ-I

Şimdiye kadar bir cismin bir doğru yada bir eğri çizgi üzerinde hareket ettiği **ÖTELEME** hareketini inceledik. Bu bölümle birlikte cismin bir eksen etrafındaki hareketini yani **DÖNME** hareketini inceleyeceğiz. Gelecek bölümde ise cismin hem öteleme hemde dönme hareketini aynı anda yaptığı durumları çalışacağız.

Başlangıçta kesin olarak belirli bir yapısı olan ve zamanla değişmeyen ölçülere sahip ideal cisimlere **Katı Cisim** denir. **Katı cisimlerin eylemsiz bir referans sisteminde ÖTELEME hareketini inceledik. Peki kararlı bir eksen etrafında DÖNME hareketini nasıl incelenir?** Bunun için gerekli yeni fiziksel nicelikleri bulmalıyız.

9.1 Dönme Hareketinin Kinematiği

Dönme olayını anlayabilmek için öncelikle dönme hareketini en iyi tanımlayacak nicelikleri tanımlamamız gerekir.

- *Sabit Eksen:* Dönme hareketinin hareketsiz bir eksen etrafında olduğunu ifade eder.
- *Dönme Ekseni:* Katı cismin etrafında dönme hareketi yaptığı eksendir. Dönme ekseni sabit olduğu gibi hareketli de olabilir. Bu bölüm boyunca dönme ekseninin sabit olduğu durumlarla ilgileneceğiz.
- *Açısal Hareket:* Sadece Dönme Hareketinde katı cismin her noktası, merkezi *dönme ekseni üzerinde bulunan bir DAİRE üzerinde hareket eder ve belirli bir zaman aralığında HER NOKTA AYNI AÇIYLA DÖNER.*

  Oysa Öteleme Kinematiğinde cismin **her noktası**, ötelendiği eğriye paralel hareket eder ve belirli bir zaman aralığında aynı miktarda ÖTELENİR.

Dönme Kinematiğini anlamanın en güzel yolu tanımlayacağımız kavramların öteleme kinematiğinde neler olduğunu düşünmektir. Bu amaçla ilk olarak çizgisel yerdeğiştirmenin karşılığı olan *açısal değiştirmeyi* tanımlayacağız. Öteleme hareketinde yaptığımız gibi açısal yer değiştirmenin zamana göre değişimine bakarak dönen cismin *açısal hızını* ve *açısal süratini* tanımlayacağız. Dönme hızındaki değişmesine karşılık gelen *açısal ivme* kavramı ile dönme kinematiğini tanımlamış olacağız.

9.2 Açısal Konum

Bir katı cismin içinde hayali bir *referans çizgisi* kabul edelim. Öyleki bu çizgi, dönme eksenine DİK olsun ve cisimle birlikte hareket etsin. Bu çizginin herhangi bir andaki **Açısal Konumu**, bu çizginin *Sıfır* açısal konum olarak kabul ettiğimiz başlangıç konumu ile arasındaki açı $\theta(t)$'dır.

Referans çizgisi üzerindeki bir P noktasının dönme eksenine olan uzaklığı $|\overrightarrow{OP}| \equiv \rho$ olsun. Sabit dönme ekseni etrafında P noktasının aldığı yol olan yayın uzunluğu $\triangle s(t)$ olmak üzere, aralarındaki ilişki geometriden

$$\triangle s(t) = \rho \triangle \theta(t) \tag{9.1}$$

ile ifade verilir.

Burada $\triangle\theta(t) \equiv \theta(t_2) - \theta(t_1)$ açısal yer değiştirmenin büyüklüğüdür ve **radyan** olarak verilmelidir.

9.2.1 Radyan

Yukarıdaki gibi iki uzunluğun birbirine oranı olarak tanımlanan açı **SKALAR** bir niceliktir ve derece veya devir olarak verilemez. Onların yerine *birimsiz bir sayı* olan ve aşağıdaki gibi tanımlanan **Radyan** niceliği ile verilir:

*ρ yarıçaplı bir çemberin çevresi $2\pi\rho$'dur. Dolayısıyla bir çemberde 2π tane **radyan** vardır.*

$$\frac{2\pi\rho}{\rho} = 2\pi(rad) \tag{9.2}$$

$$1(devir) = 360^o = 2\pi(rad) \tag{9.3}$$

$$1(rad) = 57,3^o = 0,159(devir). \tag{9.4}$$

Örnek 85. *$2m$ yarıçaplı bir vektörün bir merkez etrafında $3m$ hareket etmesi kaç radyanlık bir açısal değişimdir?*

$$\triangle\theta(t) = \frac{\triangle s(t)}{\rho}$$

$$\triangle\theta(t) = \frac{3(m)}{2(m)} = 1,5(rad)$$

Örnek 86. $1(rpm)$ *yani* $1(devir/dak)$ *kaç* (rad/sn)*'dir?*

$$\begin{aligned} 1\frac{(devir)}{(dak)} &= 1\frac{(devir)}{(dak)}\Big(\frac{2\pi(radyan)}{(devir)}\Big)\Big(\frac{1(dak)}{60(sn)}\Big) \\ &= \frac{2\pi}{60}\Big(\frac{radyan}{sn}\Big) \\ 1rpm &= 0,104719...\Big(\frac{radyan}{sn}\Big). \end{aligned} \tag{9.5}$$

Ev ödevi 20. 180° *ve* 90° *kaç radyandır?*

9.3 Açısal Yerdeğiştirme

Katı cisimde dönme eksenine dik olarak aldığımız hayali referans çizgisindeki bir P noktası dönme hareketi sonucu t_1 anında referans çizgisiyle pozitif yönlü $\theta(t_1)$ açısı yaparken, t_2 anında pozitif yönlü $\theta(t_2)$ açısı yapsın. $t_2 - t_1$ zaman aralığındaki açısal yerdeğiştirme

$$\triangle\theta(t_2 - t_1) \equiv \theta(t_2) - \theta(t_1) \tag{9.6}$$

ile radyan birimi ile tanımlanır.

9.3.1 Açısal yerdeğiştirme vektörel bir büyüklük müdür?

Açısal yerdeğiştirmeler **vektörel davranış göstermezler.** Sadece çok küçük dönmeler vektörel özelliklidir, bu da konumuz dışındadır. Bu özelliği şöyle gözlemleyelim:

Bir parçacığın konum, hız ve ivmesini vektörler kullanarak tarif etmiştik. Tek boyutlu harekette bu fiziksel nicelikleri vektör kullanmadan da ifade edebilirdik, çünkü tek boyutta sadece iki yön vardır. Bu yönleri artı ve eksi işaretlerle gösterebiliriz.

Eksen etrafındaki dönme hareketi de iki yönde olabilir. Bu yönlerden pozitif olanı şöyle belirleyelim: Bir saat düşünün, saatin yelkovanının dönmesini hayal edin. Şimdi, hangi eksen etrafında dönecekseniz, saatin merkezini o eksen içinden geçirin, ve saatin yüzü pozitif eksen yönünde baksın. **Saat yelkovanının hareket yönünün tersi, pozitif dönme yönü** olarak kabul edilecektir.

Bu bakış açısıyla Açısal Dönme Hareketi bir vektör gibi davransa da vektörlerin uyması gereken *vektörel toplamanın değişmezliği* kuralına uymaz.

$$\vec{A} + \vec{B} \neq \vec{B} + \vec{A}$$

Örnek olarak bir kitabı $x - z$ düzlemi üzerine koyalım. Kitabın üst yüzü y eksenine baksın. Kitabı önce x sonra y ekseninde pozitif yönlerde(saat yönünün tersine) 90 derece döndürün. Kitabın üst kapağı x eksenine bakacaktır. Kitabı ilk konumuna alıp dönme yönlerinin sırasını değitirip önce y sonra x ekseninde pozitif yönlerde döndürün. Kitabın üst kapağı bu sefer z eksenine bakacaktır.

Sırası değişmiş iki dönme kitabın yüzünü farklı yönlere getirmiştir. Dolayısıyla yer değiştirmelerde toplamının sıraya bağlı olduğunun ispatıdır.

Vektörel nicelikler vekörel toplam kurallarına uymak zorundadırlar. Dolayısıyla açısal yer değiştirme vektörel toplamların yerdeğiştirme kuralını ihlal ettiği için vektörel nicelik olarak kabul görmez.

9.4 Ortalama ve Anlık Açısal Sürat

Ortalama açısal sürat, $t_2 - t_1$ zaman aralığındaki açısal yerdeğiştirmenin bu zaman aralığına bölümüdür. Birimi (rad/sn)'dir.

$$w_{ort}(\triangle t) \equiv \frac{\theta(t_2) - \theta(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{9.7}$$

Anlık açısal sürat ise herzamanki gibi zaman aralığının sıfır limiti olarak tanımlanır.

$$w(t) \equiv \frac{d\theta(t)}{dt}. \tag{9.8}$$

Örnek 87. *Bir araba motorundaki* $0,36m$ *çaplı volanın* $\theta(t)$ *açısal konumu zamanın fonksiyonu olarak aşağıdaki gibi verilmiştir.*

$$\theta(t) = 2,0\Big(\frac{rad}{s^3}\Big)t^3$$

- *Volanın açısal konumunu* $t_1 = 2,0s$ *ve* $t_2 = 5,0s$ *için radyan ve derece cinsinden bulunuz.*

$$\begin{aligned}
\theta(t) &= 2,0\Big(\frac{rad}{s^3}\Big)t^3 \\
\theta(t_1 = 2,0s) &= 2,0\Big(\frac{rad}{s^3}\Big)(2s)^3 = 16rad \\
&= 16rad\Big(\frac{180^o}{\pi rad}\Big) = 916,7^o \\
\theta(t_2 = 5,0s) &= 2,0\Big(\frac{rad}{s^3}\Big)(5s)^3 = 250rad \\
&= 250rad\Big(\frac{180^o}{\pi rad}\Big) = 14323,9^o.
\end{aligned}$$

- *Volanın* $[2,0s - 5,0s]$ *aralığı için ortalama açısal süratini* (rad/sn) *ve* (rpm) *cinsinden bulunuz.*

$$\begin{aligned}
w_{ort}(\triangle t) &\equiv \frac{\theta(t_2)-\theta(t_1)}{t_2-t_1}. \\
w_{ort}(\triangle t) &= \frac{250rad-16rad}{5s-2s} \\
&= 78\frac{rad}{s} \\
&= 78\frac{rad}{s}\Big(\frac{1devir}{2\pi rad}\Big)\Big(\frac{60s}{1dak}\Big) \\
&= 744,8rpm.
\end{aligned}$$

- *Volan anlık açısal sürati için genel bir ifade türetiniz.*

$$\begin{aligned}
\theta(t) &= 2,0\Big(\frac{rad}{s^3}\Big)t^3 \\
w(t) &\equiv \frac{d\theta(t)}{dt} \\
&= 6,0\Big(\frac{rad}{s^3}\Big)t^2.
\end{aligned}$$

- *Volanın $t_3 = 3s$'deki anlık açısal süratini (rad/sn) ve (rpm) cinsinden bulunuz.*

$$\begin{aligned}
w(t) &= 6,0\Big(\frac{rad}{s^3}\Big)t^2 \\
w(3s) &= 6,0\Big(\frac{rad}{s^3}\Big)(3s)^2. \\
&= 54,0\Big(\frac{rad}{s}\Big) \\
&= 54,0\Big(\frac{rad}{s}\Big)\Big(\frac{1devir}{2\pi rad}\Big)\Big(\frac{60s}{1dak}\Big) \\
&= 515,6(rpm)
\end{aligned}$$

- *Volanın dış kenarındaki bir parçacık için $[2,0s-5,0s]$ aralığında gittiği çizgisel yolu bulunuz.*

$$\begin{aligned}
\triangle\theta(5,0s-2,0s) &= 250(rad)-16(rad) \\
&= 234(rad) \\
\triangle s(t) &= \rho\triangle\theta(t) \\
&= 0,18(m)\times 234(rad) \\
\triangle s([5,0s-2,0s]) &= 42,1(m)
\end{aligned}$$

9.5 Açısal Hız

Açısal hız ise vektörel bir ifadedir. Açısal sürat, açısal hızın şiddetidir. Yön olarak ise **sağ el kuralı** uygulanılır: dört parmak açının değişimine göre kıvrılır, baş parmak ise açısal hızın yönünü belirler.

Örnek olarak dönme sadece $x - y$ düzleminde ise açısal hız vektörü sadece z doğrultusunda olur. Saat ekseninin tersine dönmelerde açısal hız vektörü aşağıdaki yazılır.

$$\vec{w}(t) = w_z(t)\hat{k} \tag{9.9}$$

9.5.1 Açısal Hız ile Çizgisel Hız Gösterimleri Arasındaki Önemli Fark

Tek boyutlu öteleme hareketinde çizgisel hız $\vec{v}_x(t)$ ile gösterilirken, altaki x indisi bize cismin $x - ekseni$ boyunca hareket ettiğini ifade eder.

Dönme hareketinde ise durum farklıdır. Bir cisim $z - ekseni$ etrafında dönerken aslında $x - y$ düzlemi üzerinde hareket eder ve açısal hız $\vec{w}_z(t)$ ile gösterilir. Dolayısıyla gösterimde kullanılan alt indis z farklı bir anlam taşır, bir başka değişle eksen boyunca hareketi değil hangi eksen etrafında dönüldüğüdür.

9.5.2 Katı Cismin Açısal ve Çizgisel Hızları Arasındaki İlişki

Sabit eksen etrafında dönen bir katı cisimde iki parçacık düşünelim. Parçacıklar dönme eksenine göre aynı doğrultuda fakat dönme ekseninden birbirlerinin iki kat uzaklıkta olsunlar. Dönme hareketi sonucunda aynı zaman aralığında iki parçacığın açısal hızları aynı olacaktır, çünkü eş açısal yerdeğiştirmeye eş zaman aralığında taramışlardır. Fakat bu eş zaman aralığında katettikleri yay uzunlukları farklıdır, tam olarak iki kattır. Dolayısıyla çizgisel hızları iki kat olur. Benzer ilişki katı cismin içindeki tüm parçacıklar için geçerlidir.

Sonuç olarak: **Dönen katı cismin her parçası herhangi zamanda aynı açısal hıza sahiptir fakat çizgisel hızları farklıdır.**

9.6 Ortalama ve Anlık Açısal İvme

Ortalama açısal ivme, $t_2 - t_1$ zaman aralığındaki açısal hız değişiminin bu zaman aralığına bölümüdür. Birimi (rad/s^2)'dir.

$$\vec{\alpha}_{ort}(\triangle t) \equiv \frac{\vec{w}(t_2) - \vec{w}(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{9.10}$$

Anlık açısal ivme ise herzamanki gibi zaman aralığının sıfır limitidir.

$$\vec{\alpha}(t) \equiv \frac{d\vec{w}(t)}{dt}. \tag{9.11}$$

- Dönme hareketi süratleniyorsa, açısal ivme ile açısal hız aynı yönde olur.
- Dönme hareketi yavaşlıyorsa, açısal ivme ile açısal hız zıt yönde olur.
- Dönme hareketi değişmiyorsa, açısal ivme sıfırdır.

Örnek 88. *Yukarıdaki örnekte bir araba motorundaki* $0,36m$ *çaplı volanın* $\theta(t)$ *açısal konumu zamanın fonksiyonu olarak aşağıdaki gibi verilmişti.*

$$\theta(t) = 2,0\Big(\frac{rad}{s^3}\Big)t^3$$

Bu ifadeyi kullanarak açısal sürati hesaplamıştık. Açısal hız

$$\vec{w}(t) \quad = \quad 6,0\Big(\frac{rad}{s^3}\Big)t^2\hat{k}.$$

ile ifade ediliyor olsun.

- *Volanın ortalama açısal ivmesini* $t_1 = 2,0s$ *ve* $t_2 = 5,0s$ *için zaman aralığı için hesaplayınız.*

$$\begin{aligned}
\vec{w}(2s) &= 6,0\Big(\frac{rad}{s^3}\Big)(2s)^2\hat{k} \\
&= 24\Big(\frac{rad}{s}\Big)\hat{k} \\
\vec{w}(5s) &= 6,0\Big(\frac{rad}{s^3}\Big)(5s)^2\hat{k} \\
&= 150\Big(\frac{rad}{s}\Big)\hat{k} \\
\vec{\alpha}_{ort}([5(s)-2(s)]) &\equiv \frac{\vec{w}(t_2)-\vec{w}(t_1)}{t_2-t_1}. \\
&= \frac{150\Big(\frac{rad}{s}\Big)\hat{k} - 24\Big(\frac{rad}{s}\Big)\hat{k}}{5(s)-2(s)} \\
&= 42\Big(\frac{rad}{s^2}\Big)\hat{k}.
\end{aligned}$$

- *Volan anlık açısal ivmesi için genel bir ifade türetiniz.*

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha}(t) &\equiv \frac{d\vec{w}(t)}{dt} \\
&= 12,0\Big(\frac{rad}{s^3}\Big)t\hat{k}.
\end{aligned}$$

- *Volanın* $t_3 = 5s$*'deki anlık açısal ivmesini bulunuz.*

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha}(5s) &= 12,0\Big(\frac{rad}{s^3}\Big)(5s)\hat{k}. \\
&= 60,0\Big(\frac{rad}{s^2}\Big)\hat{k}.
\end{aligned}$$

9.7 Sabit Açısal İvmeli Dönme Hareketi

İvmeli dönme hareketinin en basit halidir. Dönme hareketi boyunca ivme sabittir, diğer bir değişle açısal hızdaki değişme sabit artış veya azalışlarla olmaktadır. Hesaplar öteleme kinematiğinde yapıldığı gibi elde edilebilinir. Bu bölümde bu kısmı hızlıca geçip sonuç denklemlerini öteleme kinematiğindekine benzeterek yazacağım.

$v_x(t) = v_x(0) + \lvert\vec{a}_{ort-x}(t)\rvert t$ $\Rightarrow w_z(t) = w_z(0) + \lvert\vec{\alpha}_{ort-z}(t)\rvert t$
$x(t) = x(0) + v_x(0)t + \lvert\vec{a}_{ort-x}(t)\rvert\frac{t^2}{2}$ $\Rightarrow \theta(t) = \theta(0) + w_z(0)t + \lvert\vec{\alpha}_{ort-z}(t)\rvert\frac{t^2}{2}$
$v_x^2(t_2) = v_x^2(t_1) + 2[\vec{x}(t_2) - \vec{x}(t_1)] \cdot \vec{a}_{ort-x}(t)$ $\Rightarrow w_z^2(t) = w_z^2(0) + 2[\theta(t_2) - \theta(t_1)]\alpha_{ort-z}(t)$

Bu ifadelerin **sadece sabit açısal ivmeli durumlarda geçerli** olduğunu unutmayınız.

Örnek 89. *İzlediğiniz bir DVD filminin yeni bittiğini ve diskin durmak üzere olduğunu düşünelim. Diskin $t = 0s$ anındaki açısal hızı*

$$w_z(0) = 27,5(rad/s)$$

ve açısal ivmesi sabit olup değeri

$$\alpha_z = -10,0(rad/s^2)$$

dir. Diskin yüzeyinde bir PQ çizgisi olduğunu kabul edelim ve başlangıçta bu çizginin pozitif x ekseni üzerinde olduğunu düşünelim.

- *Disk'in $t = 0,3s$ anındaki açısal hızı nedir?*

$$\begin{aligned} w_z(t) &= w_z(0) + \lvert\vec{\alpha}_{ort-z}(t)\rvert t \\ w_z(0,3s) &= 27,5(rad/s) - 10,0(rad/s^2) \times 0,3(s) \\ w_z(0,3s) &= 24,5(rad/s). \end{aligned}$$

- *Diskin yüzeyindeki PQ çizgisinin $t = 0,3s$ anında pozitif x ekseni ile yaptığı açı nedir?*

$$\theta(t) = \theta(0) + w_z(0)t + |\vec{\alpha}_{ort-z}(t)|\frac{t^2}{2} \text{ , } \textit{Başlangıç anında } \theta(0) = 0$$

$$\begin{aligned}\theta(0,3s) &= 27,5(rad/s) \times [0,3(s)] - \frac{1}{2}10,0(rad/s^2) \times [0,3(s)]^2 \\ &= 7,8(rad).\end{aligned}$$

9.7.1 Doğrusal ve Açısal Kinematik Bağlantısı

Daha önce iki ve üç boyutta öteleme hareketini incelerken, bir eksen etrafında dönen bir cismin süratini korumasına karşın hız vektörünün değiştiğini görmüştük. Bu sebepten dolayı bu cismin bir radyal ivmeye sahip oluyordu.

$$|\vec{a}_{rad}| = \frac{v^2}{R}$$

Bu cisim bir de teğetsel ivmeye sahip olursa, yani dönme hareketi yaparken bir de sürati değişirse, hareket eksen etrafında spiral yörüngelerde oluyordu. Parçacığın ivmesi ise

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a}_{rad} + \vec{a}_{par} \\ |\vec{a}_{rad}| &= \frac{v^2}{R} \\ |\vec{a}_{par}| &= \frac{d}{dt}|\vec{v}| \\ |\vec{a}| &= \sqrt{|\vec{a}_{rad}|^2 + |\vec{a}_{par}|^2}.\end{aligned}$$

ile ifade ediliyordu.

Katı cisimlerde bu durum kendi iç yapılarından dolayı oluşan küçük bir farklılık gösterir. Katı cisimlerdeki tüm parçacıklar dönme hareketi sırasında dönme ekseninden olan uzaklıklarını korurlar. Dönme ekseninden uzaklaşamayan parçacığın teğetsel ivmesi açısal ivmesine bağlı olarak değişmektedir.

Katı bir cisim üzerindeki referans çizgisi $\theta(t)$ kadar döndüğünde, referans çizgisi üzerindeki bir P noktası $s(t)$ kadar bir yay parçası kadar yol alıyordu. Bunu

$$s(t) = \rho\theta(t)$$

ile göstermiştik. Burada kullanılan ρ, P noktasının dönme eksenine olan uzaklığıdır ve katı cisim olduğundan dolayı zaman içinde değişmez. Anlık sürati bulmak için konumun zamana göre değişimine bakarız.

$$\begin{aligned}\frac{ds(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\rho\theta(t)\right] \\ &= \rho\frac{d\theta(t)}{dt} \\ &= \rho|\vec{\omega}(t)|.\end{aligned}$$

Çizgisel hız her zaman yörüngeye bulunduğu noktada teğettir. Aslında burada bulduğumuz çizgisel sürat, hızın teğetsel bileşeninin şiddetidir.

$$
\begin{aligned}
|\vec{v}_T(t)| &= \rho|\vec{\omega}(t)| && (9.12)\\
\frac{d}{dt}|\vec{v}_T(t)| &= \frac{d}{dt}\Big[\rho|\vec{\omega}(t)|\Big] \\
&= \rho\frac{d}{dt}|\vec{\omega}(t)| \\
|\vec{a}_T(t)| &= \rho|\vec{\alpha}(t)|. && (9.13)
\end{aligned}
$$

Burada $\alpha(t)$ açısal ivmenin şiddetidir. En genel olarak dönem bir cismin çizgisel ivmesinin şiddeti, radyal ve teğetsel ivmele bileşenleriyle aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}(t)| &= \sqrt{(\vec{a}_T(t))^2 + (\vec{a}_R(t))^2} && (9.14)\\
&= \sqrt{\Big(\rho|\vec{\alpha}(t)|\Big)^2 + \Big(\frac{|\vec{v}_T(t)|^2}{\rho}\Big)^2} \\
&= \sqrt{(\rho|\vec{\alpha}(t)|)^2 + (\rho|\vec{\omega}(t)|^2)^2} \\
|\vec{a}(t)| &= \rho\sqrt{(|\vec{\alpha}(t)|)^2 + (|\vec{\omega}(t)|)^4}. && (9.15)
\end{aligned}
$$

Bu ifadeden şunu anlamalıyız. Katı cismin içindeki her parçacığın açısal sürati aynı olmasına rağmen çizgisel süratleri bakımından birbirinden farklı olabilir.Daha da önemlisi çizgisel hız her zaman yörüngeye paralel olarak olarak değişmektedir. Bu ifadeler $w(t)$ ve $v(t)$ zamana bağlı olduğu durumlarda da doğrudur.

Örnek 90. *Bir disk atıcısı elindeki diski yarıçapı* $80(cm)$ *olan daire boyunca hareket ettiriyor. Disk atıcısı belirli bir anda* $10(rad/s)$ *açısal hızla dönüyor ve açısal hızı* $50(rad/s^2)$ *oranında artıyor. Disk'in bu andaki ivmesinin teğet ve merkezcil bileşenlerini ve ivmenin şiddetini bulunuz.*

$$
\begin{aligned}
\rho &= 0,80(m) \\
w(t) &= 10(rad/s) \\
\alpha(t) &= 50(rad/s^2) \\
|\vec{a}_T(t)| &= \rho\alpha(t) \\
&= 0,80(m) \times 50,0(rad/s^2) \\
&= 40,0(m/s^2) \\
|\vec{a}_R(t)| &= \rho w(t)^2 \\
&= 0,80(m) \times [10(rad/s)]^2 \\
&= 80,0(m/s^2) \\
|\vec{a}(t)| &= \sqrt{(|\vec{a}_T(t)|)^2 + (|\vec{a}_T(t)|)^2} \\
&= \sqrt{[40,0(m/s^2)]^2 + [80,0(m/s^2)]^2} \\
&= 89,4(m/s^2).
\end{aligned}
$$

Örnek 91. *Dakikada* 2400 *devir yapan bir uçak pervanesini tasarlamanız gerekmektedir. Uçağın havadaki sürati* $270(km/saat)$ *olacaktır ve pervane kanadı uçlarının hava içindeki sürati* $270(m/s)$*'yi geçmeyecektir.*

- *Pervanenin azami yarıçapı nedir?*

$$
\begin{aligned}
w(t) &= 2400(rpm) \\
&= 251(rad/s) \\
\vec{v}_{ucak}(t) &= 270(km/saat)\hat{i} \\
|\vec{v}_{ucak}(t)| &= \frac{270000}{3600}\left(\frac{m}{s}\right) \\
|\vec{v}_{ucak}(t)| &= 75\left(\frac{m}{s}\right) \\
|\vec{v}_{tan}(t)| &= \rho w(t) \\
|\vec{v}_{pervane}(t)| &= 270(m/s) \\
|\vec{v}_{pervane}(t)|^2 &= |\vec{v}_{ucak}(t)|^2 + |\vec{v}_{tan}(t)|^2 \\
\left[270\left(\frac{m}{s}\right)\right]^2 &= \left[75\left(\frac{m}{s}\right)\right]^2 + \left[251\left(\frac{m}{s}\right)\rho\right]^2 \\
\rho &= \frac{[270(m/s) - 75(m/s)][270(m/s) + 75(m/s)]}{[251(m/s)]^2} \\
&= 1,03(m)
\end{aligned}
$$

- *Bu yarıçaplı pervane ucunun ivmesi nedir?*

$$\begin{aligned}|\vec{a}_R(t)| &= \rho w^2(t) \\ &= 1,03(m) \times [251(rad/s)]^2 \\ &= 6,5 \times 10^4 (m/s^2).\end{aligned}$$

Ev ödevi 21. *Bir bisiklette bulunan ön ve arka dişlilerin; açısal hızları, çizgisel hızları ve her bir dişlideki diş sayısı arasında nasıl bağlantılar vardır?*

9.8 Dönmenin Kinetik Enerjisi

Sabit eksen etrafında dönen katı cismin kütle merkezinin dönme ekseninde olduğunu düşünelim. Aynı katı cisimi kütle merkezi üzerinde toplam kütleye sahip noktasal bir parçacık gibi de görebiliriz. Kütle merkezi hareket etmediğine göre katı cismin dönme kinetik enerjisini nasıl tarif edeceğiz.

Sabit eksen etrafında dönen katı cismin kinetik enerjisini tek tek tüm parçacıkların kinetik enerjilerinin toplamını alarak yazacağız. Eş açısal hızlarla dönen katı cismin tüm parçacıkların hızları teğetsel hızlardır.

$$\begin{aligned}KE(t) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i |\vec{v}_i(t)|^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i |\vec{v}_T(t)|^2\end{aligned}$$

Teğetsel hız ile açısal hızları birleştirirsek

$$\begin{aligned}KE(t) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2 |\vec{\omega}_i(t)|^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2 \omega^2.\end{aligned}$$

Dönme Kinetik Enerjisini, öteleme Kinetik Enerjisini benzetmek için bir tanım yapalım. I, Eylemsizlik Momenti olmak üzere:

$$\begin{aligned}I &\equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2 \\ KE(t) &= \frac{1}{2} I \omega^2. \qquad (9.16)\end{aligned}$$

9.8.1 Eylemsizlik Momentinin Anlamı

Kütle, öteleme hareketine karşılık sistemin gösterdiği dirençtir, **Ötelenme Eylemsizliği** olarak da adlandılır. Eylemsizlik momenti de bu anlamda, dönme hareketine karşılık sistemin gösterdiği dirençtir ve **Dönme Eylemsizliği** olarak da adlandırılabilinir. Eylemsizlik momenti ne kadar büyük olursa, katı cismi döndürmek o kadar zorlaşır.

Skalar bir niceliktir ve birimi (kgm^2)'dir.

9.8.2 Eylemsizlik Momentinin Hesaplanması

İnce bir silindirik çubuğu iki farklı eksen etrafında döndürelim. Bu eksenlerden ilki, çubuğu boylu boyunca kesen, ve kütle merkezinden geçen sabit eksen olsun. Bir diğeri de çuğun kütle merkezinden geçen ve çubuğun az önce bahsettiğim eksenine dik olan sabit eksen olsun. Bu iki durumdan hangisinde dönme eylemi daha kolay gerçekleşir?

Katı cisimlerin Eylemsizlik Momentleri, dönme eksenlerine göre farklılıklar gösterdiği gibi, cisimlerin geometrik yapılarına da kuvvetlice bağlıdır. Eğer katı cismi ayırt edebildiğimiz N tane parçacık olarak gözlemleyebiliyorsak, Eylemsizlik Momentini

$$I \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2. \tag{9.17}$$

olarak hesaplayabiliriz. En genel olarak katı cisimlerin eylemsizlik momenti, dm küçük hacimlerin dönme eksenine olan **dik** uzaklıklarının karesiyle integralidir. Bunu da

$$I = \int dm \rho^2. \tag{9.18}$$

olarak tanımlarız. Bu hesap birinci sınıf öğrencileri için biraz ağır olabilir bu yüzden aşağıda çok sık karşılaşılan geometrik şekiller ve bunların dönme eksenlerine göre eylemsizlik momentleri verilmektedir.

1. Merkezden geçen eksen etrafında çember: $I = MR^2$
2. Merkezden geçen eksen etrafında silindir kabuk: $I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
3. Merkezden geçen eksen etrafında dolu silindir veya disk: $I = \frac{1}{2}MR^2$
4. Merkezi yarıçap etrafında dolu silindir veya disk: $I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$
5. Merkezden geçen uzunluğa dik eksen etrafında ince çubuk: $I = \frac{1}{12}ML^2$
6. Herhangi bir çap etrafında dolu küre: $I = \frac{2}{5}MR^2$
7. Herhangi bir çap etrafında ince küresel kabuk: $I = \frac{2}{3}MR^2$

8. Herhangi bir çap etrafında çember: $I = \frac{1}{2}MR^2$

9. Merkezden geçen dik eksen etrafında plaka: $I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$

10. Ekseni kenar doğrultusunda olan plaka: $I = \frac{1}{3}Ma^2$

9.8.3 Paralel Eksen Teoremi

Dönme hareketi yukarıda bahsedilen geometrik merkezlerin etrafında olmayıp, onlara paralel olan eksenler etrafında da gerçekleşebilir. Bu tip durumlarda paralel eksen teoremi kullanılarak eylemsizlik momenti derhal bulunur.

$$I = I_{KM} + Md^2 \tag{9.19}$$

d; paralel eksenler arasındaki mesafedir.

Örnek 92. *Uzun ince bir çubuğun, merkezi çapa parallel bir uçtaki Eylemsizlik Momenti nedir?*

- *Çubuğun merkezinden geçen ve uzunluğa dik eksen etrafındaki eylemsizlik momenti* $I = \frac{1}{12}ML^2$ *idi. Burada çubuğun uzunluğu* L*'dir. Parallel eksen teoremine göre bu eksen* $L/2$ *kadar kaydırılacaktır. Böylece*

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3}ML^2. \end{aligned}$$

Örnek 93. *Hafif, esnek ve gerilmeyen bir kablo bir vincin kasnağı etrafında sarılmıştır. Kasnağın kütlesi* $50(kg)$ *ve çapı* $0,120(m)$*'dir ve sürtünmesiz bir yatak üzerinde sabit bir yatay eksen etrafında dönmektedir. Kablonun serbest ucu* $9,0(N)$ *şiddetinde sabit bir kuvvetle* $2,0(m)$ *kadar çekiliyor. Kablo kaymadan açılarak silindiri döndürüyor. Silindir başlangıçta durağan ise açısal süratini ve kablonun son süratini bulunuz.*

- *İş-Enerji Teoremine göre Kütleçekim potansiyel enerji sabit kalacaktır.*

$$\begin{aligned} U_{g1} + U_{e1} + KE_1 + W_d &= U_{g2} + U_{e2} + KE_2 \\ KE_1 + W_d &= KE_2 \end{aligned}$$

Silindir durağan halden harekete başladığı için ilk kinetik enerjisi sıfırdır.

$$\begin{aligned}
\vec{F}\cdot\vec{r} &= \frac{1}{2}Iw^2 \\
I_{silindir} &= \frac{1}{2}MR^2 \\
w &= \sqrt{\frac{2\vec{F}\cdot\vec{r}}{I}} \\
&= \sqrt{\frac{4\vec{F}\cdot\vec{r}}{MR^2}} \\
&= \sqrt{\frac{4\times 9(N)\times 2(m)}{50(kg)\times[0,06(m)]^2}} \\
&= 20(rad/s).
\end{aligned}$$

- *Kablonun son sürati :*

$$\begin{aligned}
v(t_2) &= wR \\
&= 20(rad/s)\times 0,06(m) \\
&= 1,2(m/s).
\end{aligned}$$

Örnek 94. *Hafif ve esnek bir kabloyu M kütleli ve R yarıçaplı bir silindir üzerine saralım. Silindir ihmal edilebilir bir sürtünme ile kararlı yatay bir eksen etrafında dönmektedir. Kablonun serbest ucunu m kütleli bir bloğa bağlayıp yerden h yüksekliğinden sıfır başlangıç sürati ile serbest bırakıyoruz. Blok düşerken, kablo gerilmeden veya kaymadan açılarak silindiri döndürüyor. Aşağı doğru düşen kütlenin süratini ve blok yere değdiği anda silindirin açısal süratini bulunuz.*

-

$$\begin{aligned}
U_{g1}+U_{e1}+KE_1+W_d &= U_{g2}+U_{e2}+KE_2 \\
U_{g1}+KE_1+W_d &= U_{g2}+KE_2 \\
U_{g1} &= mgh \\
KE_1 &= 0 \\
W_d &= 0 \\
U_{g2} &= 0 \\
KE_2 &= \frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}Iw^2 \\
&\Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}Iw^2.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}MR^2 \\
w &= \frac{v}{R} \\
&\Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2. \\
& \quad\quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}Mv^2 \\
&\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{4mgh}{2m+M}}
\end{aligned}
$$

- *Açısal sürat ise*

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{v}{R} \\
w &= \sqrt{\frac{4mgh}{(2m+M)R^2}}.
\end{aligned}
$$

9.9 ÖDEV SET 9

1. Bir kol saatinin
   (a) saniye göstergesinin,
   (b) dakika göstergesinin açısal hızı nedir?
2. Bir otomobil motorunun açısal hızı, $12s$ içinde dakikada 1200 devirden dakikada 3000 devire yükselmiştir.
   (a) Açısal ivmenin düzgün olduğunu kabul ederek, değerini bulunuz?
   (b) Motorun bu sürede yaptığı devir sayısı ne kadardır?
3. Çapı $1,2m$ olan bir tekerlek, $200devir/dak$'lık frekans ile dönmektedir.
   (a) Tekerleğin açısal hızı nedir?
   (b) Tekerleğin çevresi üzerindeki bir noktanın çizgisel hızı nedir?
   (c) Tekerliğin frekansını $60s$'de $1000devir/dak$'ya çıkarmak için gerekli olan sabit açısal ivme nedir?
4. Yarıçapı $10m$ olan bir santrifuj içinde bir astronata test uygulanır. Santrifuj, başlangıçta $\theta = 0,3t^2$ eşitliğine uygun dönmektedir. Burada t, saniye ile θ, radyan ile ifade edilir. $t = 5,0s$'de astronotun
   (a) teğet doğrultusundaki hızı nedir?
   (b) teğet doğrultusundaki ivmesi nedir?
   (c) yarıçap doğrultusundaki ivmesi ve
   (d) toplam ivmesi nedir?
5. (a) Hızı $80km/h$ olan bir otomobilin $66cm$ çapındaki tekerleğinin en üst noktasının hızı ve ivmesi nedir?
   (b) Tekerleğin alt noktasının hızı ve ivmesi nedir?
   (c) Tekerleğin merkezinin hızı ve ivmesi nedir?
   (d) Bütün büyüklükleri otomobilin içindeki bir yolcuya ve yolda duran bir gözlemciye göre hesaplayınız.
6. Bir pikap $33\frac{1}{3}devir/dakika$ ile dönmektedir. Dönme ekseninden $6,0cm$ uzaklıkta pikabın üzerinde çok küçük bir cisim vardır.
   (a) Cismin kaymadığını varsayarak, ivmesini bulunuz.
   (b) Cisim ile pikap arasındaki minimum statik sürtünme katsayısı nedir?
   (c) Pikabın hareketsiz halden $0,25s$'de sabit ivme ile $33\frac{1}{3}devir/dakika$ açısal hıza ulaştığını varsayınız. Bu ivmeli hareket sırasında, cismin kaymaması için minimum statik sürtünme katsayısı ne olmalıdır?

Chapter 10

KATI CİSİMLERİN DÖNME HAREKETİ-II

Dönme hareketinde kazanılan açısal ivmenin sebebi nedir? Duran cisim neden dönmeye başlar veya dönen bir cisim neden durgun hale geçer?

10.1 Dönme Hareketinin Dinamiği

Bir cisme uygulanan net kuvvetin cisime öteleme ivmesi kazandırdığını öğrendik. Benzer şekilde, bir döndürme gücü de cisime açısal ivme kazandırır. Bu güce, **Tork** veya **Döndürme Momenti** denir.

Bu bölümde dönme dinamiğini inceleyeceğiz. Her adımımızda öteleme dinamiğinde neler yaptığımızı düşünerek dönme dinamiğini nasıl anlayabileceğimizi çalışacağız.

10.2 Tork

Bir cisime etkiyen kuvvetler cismin uzayda bir bütün olarak **ötelenmesine** sebep olur. Peki kuvvetin hangi özelliği **dönmesine** sebep olur?

Herhangi bir katı cisimin bir eksen etrafında döndüğünü düşünelim. Dönme ekseninin cisimle kestiği noktaya O noktası diyelim. Bu O noktasına göre konum vektörü $\vec{r}$ olan P noktasına bir $\vec{F}$ kuvveti uygulanıyor. $\vec{F}$ ile $\vec{r}$ vektörü arasında ϕ açısı olsun. Bu kuvvet O ekseni etrafında bir dönme hareketi başlatır.

Bu hareketi anlamak için $\vec{F}$ kuvvetini iki bileşene ayırmalıyız. Bileşenlerden biri **radyal** yönde $\vec{F}_r$ diğeri ise yarıçap vektörüne **dik** yönde $\vec{F}_\perp$ bileşen vektörleridir. Radyal yönlü kuvvetin bileşeni dönmeye sebep olmazken Dik bileşen dönme hareketine sebep olur. Dik bileşenin şiddeti verilenler cinsinden

$$|\vec{F}_\perp| = |\vec{F}| \sin\phi$$

Dik vektörün döndürebilme yeteneği sadece kuvvetin şiddetine bağlı değildir. Aynı zamanda kuvvetin uygulandığı noktanın döndürme eksenine uzaklığına da bağlıdır. Böylelikle momenti

$$|\tau| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\phi \tag{10.1}$$

olarak tanımlayabiliriz. Bu ifade aslında vektörel çarpımın bir başka ifade şeklidir. Peki Tork

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

ile mi

$$\vec{\tau} = \vec{F} \times \vec{r}$$

ile mi ifade edilmelidir?

Bunun içinde sağ el kuralına bakacağız. Seçtiğimiz dik yön doğrultusunda cisime bu kuvveti uyguladığınızı düşünürseniz döndürme momentinin gerçek ifadesinin

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{10.2}$$

olduğunu anlarız. Tork Latince *"döndürmek, burkmak"* anlamına gelir. Vektörel bir ifadedir. Birimi ise $N \cdot m$'dir. Bu birimin $Joule$ ile karıştırılmaması gerekir. Fiziksel iş tanımlarken kuvvet ve yer değiştirmenin SKALAR çarpımı kullanılmıştı. Burada ise VEKTÖREL çarpım sözkonusudur. Bu yüzden araya bir nokta eklenerek $N \cdot m$ yazımı benimsenmiştir.

10.3 Dönme Hareketi için Newton Yasaları

Öteleme hareketi için Newton'un üç temel yasasını öğrenmiştik. Öteleme hareketinde cisme etkiyen net kuvvetten bahsederken, dönme hareketinde cisime etkiyen net Tork'u kullanacağız.

10.3.1 Newton'un birinci yasası

Öteleme hareketinde olduğu gibi dönme hareketinde de, Eylemsiz bir Referans Çerçevesinde Katı cisime etkiyen net Tork sıfır ise, cisim eylemsizlik gösterir ve süregeldiği hareketi devam ettirir.

10.3.2 Newton'un ikinci yasası

Eylemsiz bir referans sisteminde katı bir cisime etkiyen net tork sıfırdan farklıysa cisim dönme ekseni etrafında açısal ivmeli dönme hareketi yapar. Eylemsizlik momentinin sabit olduğu durumda bunu

$$\vec{\tau}_{net}(t) = I\vec{\alpha}(t) \tag{10.3}$$

ile ifade edebiliriz.

10.3.3 Newton'un üçüncü yasası

Katı cisim içindeki bir parçacık çifti, birbirlerine eşit şiddetli ve zıt yönlü kuvvetler uygularlar. Bu kuvvetlerin yarattığı döndürme etkisi birbirlerine yok edecek şekilde oluşur, çünkü bu parçacıkları birleştiren doğrultunun dönme eksenine olan dik uzaklığı iki parçacık için de aynıdır. Kuvvetler, zıt vektörler olduğundan net dönme etkisi sıfır olur.

Sonuç olarak: *Tork sadece net dış etkiden dolayı oluşur.*

Örnek 95. *Geçen bölümün sonunda yaptığımız Örnek 93.'a geri döneceğiz ve bu örneği* ***Dinamik*** *bakışıyla yeniden çözeceğiz. Soruyu hatırlayalım*

Hafif, esnek ve gerilmeyen bir kablo bir vincin kasnağı etrafında sarılmıştır. Kasnağın kütlesi $50(kg)$ *ve çapı* $0,120(m)$*'dir ve sürtünmesiz bir yatak üzerinde sabit bir yatay eksen etrafında dönmektedir. Kablonun serbest ucu* $9,0(N)$ *şiddetinde sabit bir kuvvetle* $2,0(m)$ *kadar çekiliyor. Kablo kaymadan açılarak silindiri döndürüyor. Silindir başlangıçta durağan olmak üzere*

- *Kasnağın SCD'nı çiziniz.*

  Yön belirleyelim. Doğu yönü pozitif x ekseni kuzey yönü pozitif y ekseni olsun. Sağ el kuralına göre tahtadan bize doğru olan normal doğrultusu pozirif z eksenini gösterir. Bu yönleri de kullanarak Kasnağa etkiyen tüm kuvvvetleri çizelim.

- *Newton dinamiğine göre denklemleri yazınız.*

$$\begin{aligned} \vec{F} + \vec{W}_K + \vec{n} &= 0 \\ \vec{\tau}_{net}(t) &= I\vec{\alpha}(t) \end{aligned}$$

- *Normal kuvveti bulunuz.*

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -9(N)\hat{\imath} \\ \vec{W}_K &= -50(kg) \times 9,8(m/s^2)\hat{\jmath} \\ \vec{n} &= 9(N)\hat{\imath} + 490(N)\hat{\jmath}. \end{aligned}$$

- *Torku bulunuz.*

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_{net}(t) &= \vec{r} \times \vec{F} + 0 \times \vec{n} + 0 \times \vec{W}_K \\ \vec{r} &= 0,060(m)\hat{\jmath} \\ \vec{\tau}_{net}(t) &= 0,060(m)\hat{\jmath} \times -9(N)\hat{\imath} \\ &= 0,54(N \cdot m)\hat{k} \end{aligned}$$

- *Açısal ivmeyi bulunuz.*

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha}(t) &= \frac{\vec{\tau}_{net}(t)}{I} \\
I &= \frac{1}{2}MR^2 \\
&= \frac{1}{2}50(kg)\Big(6\times 10^{-2}(m)\Big)^2 \\
I &= 9\times 10^{-2}(kgm^2) \\
\alpha_z &= \frac{0,54(N\cdot m)}{9\times 10^{-2}(kgm^2)} \\
&= 6(rad/s^2)
\end{aligned}$$

- *Kablonun çizgisel ivmesinin şiddeti bulunuz.*

$$\begin{aligned}
|\vec{a}| &= R\alpha_z \\
&= 0,060(m)\times 6(rad/s^2) \\
|\vec{a}| &= 0,36(m/s^2).
\end{aligned}$$

- *Kablonun çizgisel son çizgisel sürati nedir?*

$$\begin{aligned}
v_x^2(t_2) &= v_x^2(t_1) + 2[\vec{x}(t_2)-\vec{x}(t_1)]\cdot\vec{a}_{ort-x}(t) \\
\big[\vec{x}(t_2)-\vec{x}(t_1)\big] &= -2(m)\hat{i} \\
\vec{a}_{ort-x}(t) &= -0,36(m/s^2)\hat{i} \\
v_x^2(t_2) &= 0 + 2\big[-2(m)\hat{i}\big]\cdot\big[-0,36(m/s^2)\hat{i}\big] \\
&= 1,44(m^2/s^2) \\
|v_x(t_2)| &= 1,2(m/s)
\end{aligned}$$

- *Kablonun son çizgisel hızı nedir?*

$$\vec{v}(t_2) = -1,2(m/s)\hat{i}.$$

Bulduğumuz sonucu Örnek 93 ile kontrol ediniz. Böylelikle öteleme kinematik ve öteleme dinamiğinde de yaptığımız gibi, dönme kinematiği ile dönme dinamiğinde aynı sonuçlara ulaşabileceğimizi görmüş olduk.

Örnek 96. *Geçen bölümün sonunda yaptığımız Örnek 94.'e geri döneceğiz ve bu örneği* ***Dinamik*** *bakışıyla yeniden çözeceğiz. Soruyu hatırlayalım:*

Hafif ve esnek bir kabloyu M kütleli ve R yarıçaplı bir silindir üzerine saralım. Silindir ihmal edilebilir bir sürtünme ile kararlı yatay bir eksen etrafında dönmektedir. Kablonun serbest ucunu m kütleli bir bloğa bağlayıp yerden h yüksekliğinden sıfır başlangıç sürati ile serbest bırakıyoruz. Blok düşerken, kablo gerilmeden veya kaymadan açılarak silindiri döndürüyor.

Batı yönü pozitif x ekseni, güney yönünü pozitif y ekseni ve sayfa düzleminden bize doğru gelen yönü pozitif z ekseni seçelim.

- *Kasnağın SCD'nı çiziniz.*
- *m kütleli cisimin SCD'nı çiziniz.*
- *Kasnak için Newton'un hareket denklemlerini yazınız.*

$$\begin{aligned} \vec{T}_{m-k} + \vec{W}_K + \vec{n} &= 0 \\ \vec{\tau}_{net}(t) &= I\vec{\alpha}(t) \end{aligned}$$

- *m kütleli cisim için Newton'un hareket denklemlerini yazınız.*

$$\vec{T}_{k-m} + \vec{W}_m = m\vec{a}$$

- *Kasnaktaki Torku bulunuz.*

$$\begin{aligned} \vec{T}_{m-k} &= T\hat{j} \\ \vec{W}_K &= M_k g\hat{j} \\ \vec{\tau}_{net}(t) &= \vec{r} \times \vec{T}_{m-k} \\ \vec{r} &= R\hat{i} \\ \vec{\tau}_{net}(t) &= R\hat{i} \times T\hat{j} \\ &= RT\hat{k} \end{aligned}$$

- *Kasnağın açısal ivmesini bulunuz.*

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_{net}(t) &= I\vec{\alpha}(t) \\ &= \frac{1}{2}MR^2\vec{\alpha}(t) \\ \Rightarrow \vec{\alpha}(t) &= \frac{RT}{\frac{1}{2}MR^2}\hat{k} \\ \vec{\alpha}(t) &= \frac{2T}{MR}\hat{k} \end{aligned}$$

- *Kasnaktaki ipin çizgisel ivmesini bulunuz.*

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= R|\alpha_z(t)|\hat{j} \\ &= R\frac{2T}{MR}\hat{j} \\ &= \frac{2T}{M}\hat{j}\end{aligned}$$

- *İpteki gerilmenin şiddetini verilenler cinsinden bulunuz.*

$$\begin{aligned}\vec{T}_{k-m} &= -T\hat{j} \\ \vec{W}_m &= mg\hat{j} \\ \vec{T}_{k-m} + \vec{W}_m &= m\vec{a} \\ \Rightarrow -T\hat{j} + mg\hat{j} &= m\frac{2T}{M}\hat{j} \\ T\Big[1 + \frac{2m}{M}\Big] &= mg \\ T &= \frac{mM}{M+2m}g\end{aligned}$$

- *m kütleli cismin çizgisel ivmesini bulunuz.*

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{2T}{M}\hat{j} \\ &= \frac{2m}{M+2m}g\hat{j}\end{aligned}$$

- *m kütleli bloğun yere değmeden önceki süratini bulunuz.*

$$\begin{aligned}v^2(t_2) &= v^2(t_1) + 2[\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)] \cdot \vec{a}_{ort}(t) \\ \big[\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)\big] &= h\hat{j} \\ \vec{a}(t) &= \frac{2m}{M+2m}g\hat{j} \\ v^2(t_2) &= 0 + 2\big[h\hat{j}\big] \cdot \big[\frac{2m}{M+2m}g\hat{j}\big] \\ &= \frac{4mgh}{M+2m}\hat{j} \cdot \hat{j} \\ |v(t_2)| &= \sqrt{\frac{4mgh}{M+2m}}\end{aligned}$$

Bulduğumuz sonucu Örnek 94 ile kontrol ediniz. Böylelikle öteleme kinematik ve öteleme dinamiğinde de yaptığımız gibi, dönme kinematiği ile dönme dinamiğinde aynı sonuçlara ulaşabileceğimizi görmüş olduk.

10.4 Dönme Hareketinde İş-Enerji Teoremi ve Güç

Öteleme Dinamiğinde İş-Enerji Teoremini şöyle öğrenmiştik:

Eylemsiz bir referans sisteminde bir parçacığın üzerinde net kuvvetin yaptığı iş, parçacığın Kinetik Enerjisindeki değişimdir.

$$\begin{aligned} W_F &\equiv \triangle KE. \\ \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \frac{1}{2}mv^2(t_2) - \frac{1}{2}mv^2(t_1) \end{aligned}$$

Kuvvetin hareket boyunca sabit olması durumunda İş-Enerji Teoremini

$$\vec{F} \cdot \triangle\vec{r} = \triangle KE$$

Dönme Dinamiğinde İş-Enerji Teoremini şöyle ifade edebiliriz:

Tork, katı cisimi sabit bir eksen etrafında ivmelendirdiğinde, Tork bu cisim üzerinde bir iş yapmış olur. Yapılan bu iş, cisimin dönme kinetik enerjisindeki değişime eşittir.

$$W_\tau \equiv \triangle KE. \tag{10.4}$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} |\vec{\tau}| d\theta = \frac{1}{2}Iw^2(t_2) - \frac{1}{2}Iw^2(t_1) \tag{10.5}$$

Eğer Tork dönme hareketi boyunca sabitse $\triangle\theta \equiv \theta(t_2) - \theta(t_1)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |\vec{\tau}| \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta &= \frac{1}{2}Iw^2(t_2) - \frac{1}{2}Iw^2(t_1) \\ |\vec{\tau}|\triangle\theta &= \triangle KE \end{aligned} \tag{10.6}$$

elde edilir.

10.4.1 Güç

Güç öteleme veya dönme dinamiğinde olsa da işin yapılma hızı anlamına gelir.

Ortalama güç

$$P_{ort} = \frac{\triangle W}{\triangle t} \tag{10.7}$$

Anlık güç ise

$$P(t) = \frac{dW(t)}{dt}. \tag{10.8}$$

ile tanımlanmıştı.

Dönme dinamiğinde Ortalama Güç

$$P_{ort} = |\vec{\tau}|\frac{\theta(t_2)-\theta(t_1)}{t_2-t_1} \tag{10.9}$$
$$= |\vec{\tau}|w_{ort}. \tag{10.10}$$

Dönme dinamiğinde Anlık Güç

$$P(t) = \vec{\tau}\cdot\vec{w}(t). \tag{10.11}$$

Örnek 97. *Bir otomobilin çıkış gücü* $6000(rpm)$*'de* $200(hp)$ *olarak tanıtılmıştır. Motorun torku nedir?*

- $$\begin{aligned} w_z &= 6000(rpm) \\ &= 6000\Big(\frac{devir}{dakika}\Big)\Big(\frac{dakika}{60(s)}\Big)\Big(\frac{2\pi(rad)}{devir}\Big) \\ &= 200\pi(rad/s) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} P &= 200(hp) \\ &= 200(hp)\Big(\frac{746(watt)}{hp}\Big) \\ &= 149200(watt) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} P(t) &= \vec{\tau}\cdot\vec{w}(t) \\ |\tau_z| &= \frac{P(t)}{w_z(t)} \\ |\tau_z| &= \frac{149200}{200\pi}\frac{(watt)}{(rad/s)} \\ &= \frac{746}{\pi}(N\cdot m) \end{aligned}$$

Örnek 98. *Bir elektrik motoru şaftına monte edilmiş bir bileği taşa* $10(N \cdot m)$ *büyüklüğünde sabit bir tork uygulanmaktadır. Taşın şafta göre eylemsizlik momenti* $2(kgm^2)$*'dir. Sistem durağan halden harekete başlamaktadır.*

- *Motorun* $8(s)$*'de yaptığı iş nedir?*

$$\begin{aligned}
|\vec{\alpha}| &= \frac{|\vec{\tau}|}{I} \\
&= \frac{10(N \cdot m)}{2(kgm^2)} \\
\Rightarrow \alpha_z &= 5(rad/s^2). \\
\theta(t) &= \theta(0) + w_z(0)t + |\vec{\alpha}_{ort-z}(t)|\frac{t^2}{2} \\
w_z(0) &= 0 \\
\theta(8(s)) - \theta(0) &= \frac{1}{2}5(rad/s^2)(8s)^2 \\
\Rightarrow \triangle\theta &= 160(rad) \\
W &= |\vec{\tau}|\triangle\theta \\
&= 10(N \cdot m)160(rad) \\
W &= 1600(J).
\end{aligned}$$

- *Bu süre sonundaki Kinetik Enerjisi nedir?*

$$\begin{aligned}
W &= \triangle KE \\
&= KE_2 - KE_1 \\
KE_1 &= 0(J) \\
\Rightarrow KE_2 &= 1600(J)
\end{aligned}$$

- *Motor tarafından aktarılan ortalama güç nedir?*

$$\begin{aligned}
P_{ort} &= |\vec{\tau}|\frac{\theta(t_2) - \theta(t_1)}{t_2 - t_1} \\
&= 10(N \cdot m)\frac{160(rad)}{(8s)} \\
&= 200(W).
\end{aligned}$$

10.5 Açısal Momentum

Öteleme hareketini incelerken, çizgisel momentum isimli bir vektörel fiziksel nicelik tanımlamıştık. Çizgisel momentumun zaman içinde değişimi bize Newton'un ikinci yasasının gerçek şeklini ifade etmişti. Dönme hareketinde bu niceliklerin karşılığını ifade etmeye çalışacağız.

$$\begin{aligned} \vec{p}(t) &= m(t)\vec{v}(t) \\ \vec{F}_{net} &= \frac{d\vec{p}(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Öteleme dinamiğindeki çizgisel momentumun dönme dinamiğindeki karşılığı **Açısal Momentumdur.**

$$\vec{L}(t) = I(t)\vec{w}(t) \tag{10.12}$$

Birimi $(kg \cdot m^2/s)$'dir. Katı cisimlerde Eylemsizlik momenti zamandan bağımsız bir sabittir.

10.5.1 Açısal-Çizgisel Momentum İlişkisi

Bunu anlamak için kuvvet ile torku nasıl ilişkilendirdiğimizi düşünmemiz yeterlidir.

$$\vec{\tau}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{F}(t).$$

Bir katı cismin açısal momentumu da benzer şekilde

$$\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t). \tag{10.13}$$

ile tanımlanır.

10.5.2 Birden fazla Noktasal Parçacığın Toplam Açısal Momentumu

Her bir parçacığın dönme eksenine olan konumu $\vec{r}_i(t)$ ile gösterilirse, $\vec{p}_i(t) = m_i(t)\vec{v}_i(t)$ her parçacığın çizgisel momentumu olmak üzere, Parçacıklar sisteminin toplam açısal momentumu

$$\begin{aligned} \vec{L}(t) &= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i(t) \times \vec{p}_i(t), \\ |\vec{L}(t)| &= \sum_{i=1}^{N} m_i(t)|\vec{r}_i(t)||\vec{v}_i(t)|, \\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i(t)|\vec{r}_i(t)|^2|\vec{w}(t)|, \\ |\vec{L}(t)| &= I|\vec{w}(t)|. \\ \vec{L}(t) &= I\vec{w}(t) \end{aligned}$$

10.6 Açısal Momentum ile Newton'un İkinci Yasası

Öteleme Hareketinde Newtonun ikinci yasası

$$\vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}(t)}{dt}.$$

ile ifade edilmişti.

Dönme Hareketinde ise Newton'un ikinci yasası

$$\vec{\tau}_{net} = \frac{d\vec{L}(t)}{dt}. \tag{10.14}$$

ile ifade edilir. Açısal momentumu yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}_{net} &= \frac{d}{dt}\left[\vec{r}(t) \times \vec{p}(t)\right] \\
&= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \times m(t)\frac{d\vec{r}(t)}{dt} + \vec{r}(t) \times \frac{d\vec{p}(t)}{dt} \\
&= \vec{r}(t) \times \vec{F}_{net}(t).
\end{aligned}$$

Böylelikle ifadenin doğruluğunu ispat etmiş olduk.

Bir başka yolla ise katı cisimler için ($I(t) = I$ katı cisimlerde)

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}_{net} &= \frac{d}{dt}\left[I\vec{w}(t)\right] \\
&= I\frac{d\vec{w}(t)}{dt} \\
&= I\vec{\alpha}(t)
\end{aligned}$$

ispatlanır.

Örnek 99. *Bir jet motorundaki türbün fanının dönme eksenine göre eylemsizlik momenti* $2,5(kgm^2)$*'dir. Türbün çalıştığında açısal hızı zamanın fonksiyonu olarak*

$$w_z(t) = 40(rad/s^3)t^2$$

veriliyor.

- *Fanın Açısal momentumunu zamanın fonksiyonu olarak bulunuz.*

$$\begin{aligned}
I(t) &= 2,5(kgm^2) \\
w_z(t) &= 40(rad/s^3)t^2 \\
L_z(t) &= Iw_z(t) \\
&= 100t^2(kg \cdot m^2/s^3)
\end{aligned}$$

- *Fanın Açısal momentumunun* $3(s)$*'deki değerini bulunuz.*

$$\begin{aligned}
L_z(3s) &= 100(3s)^2(kg \cdot m^2/s^3) \\
&= 900(kg \cdot m^2/s).
\end{aligned}$$

- *Fan üzerine etkiyen net torku zamanın fonksiyonu olarak bulunuz.*

$$\begin{aligned}
\tau_z(t) &= I\alpha_z(t) \\
\alpha_z(t) &= \frac{dw_z(t)}{dt} \\
&= 80(rad/s^3)t \\
\Rightarrow \tau_z(t) &= 2,5(kgm^2) \times 80(rad/s^3)t \\
&= 200t(kg \cdot m^2/s^3)
\end{aligned}$$

- *Fan üzerine etkiyen net torkun* $3(s)$*'deki değerini bulunuz.*

$$\begin{aligned}
\alpha_z(3s) &= 200 \times (3s)(kg \cdot m^2/s^3) \\
&= 600(N \cdot m).
\end{aligned}$$

10.7 Açısal Momentumun Korunumu

Bir cismin üzerinde net tork sıfır ise Açısal momentum zaman içinde değişmiyor demektir. Bir başka değişle bu **Açısal Momentum KORUNUYOR** olarak dillendirilir.

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}_{net} &= \frac{d\vec{L}(t)}{dt}. \\
0 &= \frac{d\vec{L}(t)}{dt} \\
\Rightarrow & \quad \vec{L}(t) = \text{Sabit} \\
& \quad \Rightarrow I(t_1)\vec{w}(t_1) = I(t_2)\vec{w}(t_2)
\end{aligned}$$

Örnek 100. *Bir buz patencisi, dışarıya doğru açık olan kollarını kendisine doğru çekerek açısal hızını arttırır. Oysa üzerine etkiyen dış kuvvette bir değişim yoktur. Buradaki fiziksel süreci açıklayınız?*

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}_{net} &= 0 \\
\vec{L}(t_1) &= \vec{L}(t_2) \\
I(t_1)\vec{w}(t_1) &= I(t_2)\vec{w}(t_2). \\
I(t_2) &< I(t_1) \\
w_z(t_2) &> w_z(t_1).
\end{aligned}$$

Örnek 101. *Akrobasiye meraklı bir fizik profesörü, ellerinde* $5,0(kg)$ *kütleli iki dambılla kollarını yatay olarak açmış ve dönen bir masanın ortasında durmaktadır. Profesör dikey eksen etrafında dönerken bir deviri* $2(s)$*'de tamamlar. Profesör ellerindeki dambılları karnına doğru çektiğinde oluşan yeni açısal momentumunu bulunuz. Dambıllar olmadan kolları dışarıdayken* $3,0(kgm^2)$ *olan eylemsizlik momenti kollarını karnına çektiğinde* $2,2(kgm^2)$*'ye düşmektedir. Başlangıçta dambılların dönme eksenine olan uzaklığı* $1,0(m)$*, hareketin sonunda ise* $0,2(m)$*'dir. Dambılları noktasal parçacık kabulu yaparak soruyu çözünüz.*

$$\begin{aligned}
I_{sistem} &= I_{adam} + I_{dambıl} \\
I_{sistem}(t_1) &= 3,0(kgm^2) + 2 \times 5(kg) \times [1,0(m)]^2 \\
&= 13,0(kgm^2) \\
I_{sistem}(t_2) &= 2,2(kgm^2) + 2 \times 5(kg) \times [0,2(m)]^2 \\
&= 2,6(kgm^2) \\
w_z(t_1) &= \frac{1(dev)}{2(s)} \\
&= \pi(rad/s) \\
L_z(t_1) &= L_z(t_2) \\
13,0(kgm^2) \times \frac{1(dev)}{2(s)} &= 2,6(kgm^2) w_z(t_2) \\
w_z(t_2) &= 2,5(devir/s) \\
&= 5\pi(rad/s).
\end{aligned}$$

Kinetik enerjisi

$$\begin{aligned}
KE(t_1) &= \frac{1}{2} I_{sistem}(t_1) w_z(t_1)^2 \\
&= 64J \\
KE(t_2) &= \frac{1}{2} I_{sistem}(t_2) w_z(t_2)^2 \\
&= 320J.
\end{aligned}$$

Örnek 102. *Dönme eksenleri aynı olan farklı yarıçaplı iki disk aynı yönlü farklı açısal süratlerde dönmektedir. Açısal hızları süratleri değiştirilmeden, herhangi bir tork uygulamadan sadece dönme eksenleri doğrultusunda iterek birbirlerine kenetliyoruz. Bu birleşmeden sonra diskler birbirlerine sürtünerek ortak bir açısal sürate ulaşıyorlar.*

- *Ortak açısal sürati ifade ediniz.*

$$\begin{aligned}
I_A(t_1) w_A(t_1) + I_B(t_1) w_B(t_1) &= (I_A + I_B) w \\
w_{A+B} &= \frac{I_A(t_1) w_A(t_1) + I_B(t_1) w_B(t_1)}{(I_A + I_B)}
\end{aligned}$$

- *Kinetik Enerji kaybı ne kadardır?*

$$\begin{aligned} KE(t_1) &= \frac{1}{2}I_A(t_1)w_A(t_1)^2 + \frac{1}{2}I_B(t_1)w_B(t_1)^2 \\ KE(t_2) &= \frac{1}{2}[I_A + I_B](t_2)w_{A+B}(t_2)^2. \\ \triangle KE &= KE(t_2) - KE(t_2) \end{aligned}$$

Örnek 103. *Yukarıdaki Örnek 102'i sayısal ifadelerle yapalım. Açısal veya çizgisel momentum korunumu aynı şekilde yaklaşılması gereken problemlerdir.*

A'nın kütlesi $2,0(kg)$*; yarıçapı* $0,20(m)$ *ve ilk açısal hızı* $50(rad/s)$*'dir. B'nin kütlesi* $4,0(kg)$*; yarıçapı* $0,10(m)$ *ve ilk açısal hızı* $200(rad/s)$*'dir.*

- *Ortak açısal sürati ifade ediniz.*

$$\begin{aligned} I_A(t_1) &= \frac{1}{2}M_A R_A^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 2,0(kg) \times (0,20(m))^2 \\ I_A(t_1) &= 0,040(kgm^2) \\ I_B(t_1) &= \frac{1}{2}M_B R_B^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 4,0(kg) \times (0,10(m))^2 \\ I_B(t_1) &= 0,020(kgm^2) \\ w_{A+B} &= \frac{I_A(t_1)w_A(t_1) + I_B(t_1)w_B(t_1)}{(I_A + I_B)} \\ &= \frac{0,040(kgm^2) \times 50(rad/s) + 0,020(kgm^2) \times 200(rad/s)}{0,040(kgm^2) + 0,020(kgm^2)} \\ &= \frac{2 \times 50(rad/s) + 1 \times 200(rad/s)}{3} \\ &= 100(rad/s). \end{aligned}$$

- *Kinetik Enerji kaybı ne kadardır?*

$$\begin{aligned} KE(t_1) &= \frac{1}{2}I_A(t_1)w_A(t_1)^2 + \frac{1}{2}I_B(t_1)w_B(t_1)^2 \\ &= \frac{1}{2}0,040(kgm^2)[50(rad/s)]^2 + \frac{1}{2}0,020(kgm^2)[200(rad/s)]^2 \\ &= 450(J) \\ KE(t_2) &= \frac{1}{2}[I_A + I_B](t_2)w_{A+B}(t_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}0,060(kgm^2)[100(rad/s)]^2 \\ &= 300(J) \\ \triangle KE &= 150(J). \end{aligned}$$

Örnek 104. *Genişliği $d = 1,0(m)$ ve kütlesi $M_K = 15(kg)$ olan bir kapı, bir kenarından menteşelerle dikey bir dönme eksenine bağlıdır ve bu eksen etrafında sürtünmesi dönebilmektedir. Kapının kilit dili kapalı değildir. Bir adam sürati $400(m/s)$ ve kütlesi $m_k = 10g$ olan bir mermiyi, kapı düzlemine dik olarak kapının tam ortasına ateşliyor.*

- *Mermi kapıya saplandıktan sonra kapının açısal süratini bulunuz.*

  Kapı ile mermiyi tek bir sistem olarak düşünebiliriz. Kapı menteşelerinin oluşturduğu eksene göre herhangi bir dış tork yok dolayısıyla bu eksene göre açısal momentum korunur. Başlangıçta kapı hareketsiz, sadece gelen kurşunun dönme eksenine göre açısal momentumu var, kurşun kapıya saplanınca ortak açısal sürati w ile gösterelim. Doğuyu pozitif x ekseni, kuzeyi de pozitif y ekseni olarak düşünelim, sayfa düzlemi dışında bize doğru yön pozitif z eksenidir. Dönme x-y düzleminde olmaktadır, yani dönme yönü $\hat{k}$'dır.

$$
\begin{aligned}
m_k &= 10 * 10^{-3}(kg) \\
\vec{v}_k(t_1) &= 400(m/s)\hat{i} \\
\vec{R}(t_1) &= -0,5(m)\hat{j} \\
\vec{L}_{mermi}(t_1) &= \vec{R}(t_1) \times m\vec{v}_k(t_1) \\
&= [-0,5(m)][10 * 10^{-3}(kg)][400(m/s)](\hat{j} \times \hat{i}) \\
&= 2,0(kg \cdot m^2/s)\hat{k} \\
\vec{L}_{kapı}(t_1) &= 0 \\
\vec{L}_{kapı+mermi}(t_2) &= [I_{kapı} + I_{mermi}]\vec{w}(t_2) \\
I_{kapı} &= \frac{1}{3}M_K d^2 \\
&= \frac{1}{3}15(kg)(1,0(m))^2 \\
&= 5,0(kgm^2) \\
I_{mermi} &= m_k\left(\frac{d}{2}\right)^2 \\
&= 10 \times 10^{-3}(kg)(0,5(m))^2 \\
&= \frac{10}{4} \times 10^{-3}(kgm^2)
\end{aligned}
$$

Açısal momentum korunumu bize

$$
\begin{aligned}
\vec{L}_{mermi}(t_1) &= \vec{L}_{kapı+mermi}(t_2) \\
\vec{w}(t_2) &= \frac{2,0(kg \cdot m^2/s)}{[5,0(kgm^2) + 2,5 * 10^{-3}(kgm^2)]}\hat{k} \\
&\simeq 0,40(rad/s)\hat{k}
\end{aligned}
$$

- *Kinetik Enerji korunur mu?*

$$\begin{aligned}
KE(t_1) &= KE_{mermi}(t_1) + KE_{kapı}(t_1) \\
&= \frac{1}{2}m_k(v_k(t_1))^2 + 0 \\
&= \frac{1}{2}[10 * 10^{-3}(kg)][400(m/s)]^2 \\
&= 800(J). \\
KE(t_2) &= KE_{mermi+kapı}(t_1) \\
&= \frac{1}{2}[I_{kapı} + I_{mermi}](w_z(t_2))^2 \\
&= \frac{1}{2}[5,0025(kgm^2)][0,40(rad/s)]^2 \\
&= 0,40(J).
\end{aligned}$$

10.8 Katı Cismin Hareketli Eksene Göre Dönmesi

Şimdiye kadar katı cisimlerin dönme hareketlerini sabit eksen etrafında yaptığını düşündüktü. Katı cisimler birleşik hareket de yapabilirler. Kısacası bir katı cismin kütle merkezi öteleme hareketi yaparken, aynı zamanda da belirli bir ekseni etrafında dönme hareketi yaparsa ne olur. Sistemin kinetik enerjisi

$$KE(t) = \frac{1}{2}I_{km}(t)w^2(t) + \frac{1}{2}m(t)v_{km}^2(t). \tag{10.15}$$

olur.

Bu tip birleşik harekete en temel örnek, **kaymadan yuvarlanma** örneğidir.

10.8.1 Kaymadan Yuvarlanma

Birleşik hareketi Kütle Merkezinin Ötelenmesi ve Kütle Merkezi Etrafında Dönme hareketi olarak düşünürüz.

- Kütle Merkezinin ötelenme hızında katı cisimdeki tüm parçacıklar ötelenir.
- Kütle Merkezi etrafında dönme hareketinde katı cisimdeki tüm parçacıklar aynı açısal hıza sahiptir. Fakat çizgisel hızları değişiktir. Yer ile temas noktasında çizgisel hız, kütle merkezindeki çizgisel hızın tam tersidir. Bu yüzden temas noktası anlık durağandır.
- Üst noktadaki çizgisel hız kütle merkezi çizgisel hızı ile aynıdır. Toplam hız o an için kütle merkezinin hızının iki katı olur.
- Kütle merkezi hizasındaki hızlar zıt vektörlerdir ve kütle merkezi ile dik açı oluştururlar. Bu noktlardaki anlık hızın şiddeti kütle merkezinin anlık hız şiddetinin $\sqrt{2}$ katıdır.

Sistemin kinetik enerjisini Kütle merkezine göre

$$KE(t) = \frac{1}{2}I_{km}(t)w^2(t) + \frac{1}{2}m(t)v_{km}^2(t). \tag{10.16}$$

gibi yazabildiğimiz gibi paralel eksen teoremine göre temas olduğu noktaya göre de ifade edebiliriz. O halde

$$KE(t) = \frac{1}{2}I_{temas}(t)w^2(t) \tag{10.17}$$

Buradaki temas eden nokta anlık olarak çizgisel hıza sahip olmadığını kullanarak, ikinci terimi düşürdük. Buna karşın Eylemsizlik momentine ek bir terim geldi. Temas noktasındaki eylemsizlik momenti I_{temas}, kütle merkezindeki eylemsizlik momenti ve paralel taşınma terimine eşit olur

$$I_{temas}(t) = I_{km}(t) + MR^2 \tag{10.18}$$

yerine yazarsak kinetik enerji

$$KE(t) = \frac{1}{2}\left[I_{km}(t) + MR^2\right]w^2(t) \tag{10.19}$$

$$= \frac{1}{2}I_{km}(t)w^2(t) + \frac{1}{2}MR^2w^2(t) \tag{10.20}$$

$$= \frac{1}{2}I_{km}(t)w^2(t) + \frac{1}{2}m(t)v_{km}^2(t). \tag{10.21}$$

olur. Buradaki ikinci terimde $w(t)R = v_{km}$ açısal hız ile çizgisel hız arasındaki bağlantısını kullandık ve ilk olarak ifade ettiğimiz eşitliği tekrar bulduk.

Örnek 105. *Yoyo oyuncağı, M kütleli R yarıçaplı silindire sarılı bir sicimin hareketi ile oluşur. Silindir sıfır ilk hızı ile serbest bırakılır ve aşağıya doğru düşerek h kadar hareket eder ve hemen ardından geri döner. Buna göre yoyonun kütle merkezinin sürati nedir?*

$$
\begin{aligned}
U_g(t_1) + U_e(t_1) + KE(t_1) + W_d &= U_g(t_2) + U_e(t_2) + KE(t_2) \\
U_g(t_1) &= Mgh \\
U_e(t_1) &= 0 \\
KE(t_1) &= KE_o(t_1) + KE_d(t_1) = 0 \\
W_d &= 0 \\
U_g(t_2) &= 0 \\
U_e(t_2) &= 0 \\
KE(t_2) &= KE_o(t_2) + KE_d(t_2) \\
&= \frac{1}{2}Mv_{KM}^2(t_2) + \frac{1}{2}I_{KM}w^2(t_2) \\
\Rightarrow Mgh &= \frac{1}{2}Mv_{KM}^2(t_2) + \frac{1}{2}I_{KM}w^2(t_2) \\
I_{KM} &= \frac{1}{2}MR^2 \\
w(t_2) &= \frac{v_{KM}(t_2)}{R} \\
\Rightarrow Mgh &= \frac{1}{2}Mv_{KM}^2(t_2) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}MR^2\right]\left[\frac{v_{KM}(t_2)}{R}\right]^2 \\
Mgh &= \frac{1}{2}Mv_{KM}^2(t_2) + \frac{1}{4}Mv_{KM}^2(t_2) \\
Mgh &= \frac{3}{4}Mv_{KM}^2(t_2) \\
v_{KM}(t_2) &= \sqrt{\frac{4}{3}gh}.
\end{aligned}
$$

Örnek 106. *Silindir, küre, küresel kabuk ve çember gibi vb. farklı kütleli cisimler sürtünmesiz eğik düzlemin tepesinden ilk hareketsiz olarak aşağı doğru kaymadan yuvarlanmaktadır. Hangi biçimde olan katı cisim eğik düzlemin tabanına önce varır?*

$$
\begin{aligned}
U_g(t_1) + U_e(t_1) + KE(t_1) + W_d &= U_g(t_2) + U_e(t_2) + KE(t_2) \\
U_g(t_1) &= m_i g h \\
U_e(t_1) &= 0 \\
KE(t_1) &= KE_o(t_1) + KE_d(t_1) = 0 \\
W_d &= 0 \\
U_g(t_2) &= 0 \\
U_e(t_2) &= 0 \\
KE(t_2) &= KE_o(t_2) + KE_d(t_2) \\
&= \frac{1}{2} m_i v_{KM-i}^2(t_2) + \frac{1}{2} I_{KM-i} w_i^2(t_2) \\
\Rightarrow m_i g h &= \frac{1}{2} m_i v_{KM-i}^2(t_2) + \frac{1}{2} I_{KM-i} wi^2(t_2) \\
I_{KM} &= c_i m_i R_i^2 \\
w_i(t_2) &= \frac{v_{KM-i}(t_2)}{R_i} \\
\Rightarrow m_i g h &= \frac{1}{2} m_i v_{KM-i}^2(t_2) + \frac{1}{2}\left[c_i m_i R_i^2\right]\left[\frac{v_{KM-i}(t_2)}{R_i}\right]^2 \\
m_i g h &= \frac{1}{2} m_i v_{KM-i}^2(t_2) + \frac{1}{2} c_i m_i v_{KM-i}^2(t_2) \\
g h &= \frac{1}{2} v_{KM-i}^2(t_2) + \frac{1}{2} c_i v_{KM-i}^2(t_2) \\
v_{KM-i}(t_2) &= \sqrt{\frac{2gh}{1+c_i}}.
\end{aligned}
$$

c_i her cisimin önündeki katsayıdır. Farklı yarıçaplı ve farklı kütleli cisimler olsada sonucun değişmediğine dikkat ediniz. c_i büyüdükçe $v_{KM-i}(t_2)$ azalır, varış süreleri artar. Buna göre listeden hangi cisim veya cisimlerin ilk ineceğini bulunuz.

10.9 Birleşik Hareketin Dinamik Bağıntıları

Birleşik hareket yapan katı cismin hareketini sadece İş-Enerji bakış açısı altında incelemeyiz. Şimdiye kadar çalıştığımız dinamik bağıntılar

$$\vec{F}_{net} = M\vec{a}_{km} \tag{10.22}$$
$$\vec{\tau}_{net} = I_{km}\vec{\alpha}. \tag{10.23}$$

aşağıdaki şartlar altında geçerlidir.

- Kütle Merkezinden geçen dönme ekseni simetri ekseni olmalıdır.

- Dönme ekseni yön değiştirmemelidir.

Örnek 107. *Aşağıya doğru ivmelenen yoyonun kütle merkezinin hızını Örnek 105'de bulmuştuk. Şimdi Dinamik açıdan aynı sonuca ulaşacağız.*

- *Yoyonun SCD'sini çizin.*

  Doğu yönünü pozitif x ekseni, kuzey yönünü pozitif y ekseni kabul edelim. z ekseni tahtadan bize doğrudur.

- *Newton Denklemlerini yazınız.*

$$\vec{F}_{net} = \vec{W}_y + \vec{T} = M\vec{a},$$
$$\vec{\tau}_{net} = \vec{r} \times \vec{T} = I\vec{\alpha}.$$

- *Newton denklemlerini çözünüz.*

$$
\begin{aligned}
\vec{W}_y &= -Mg\hat{j} \\
\vec{T} &= T\hat{j} \\
\vec{a} &= -a\hat{j} \\
\vec{r} &= R\hat{i} \\
I_{KM} &= \frac{1}{2}MR^2 \\
\\
-Mg\hat{j} + T\hat{j} &= -Ma\hat{j}, \\
\Rightarrow a &= \frac{Mg - T}{M} \\
\\
R\hat{i} \times T\hat{j} &= I\vec{\alpha} \\
\Rightarrow \vec{\alpha} &= \frac{2RT}{MR^2}\hat{k} \\
|\vec{\alpha}| &= \frac{2T}{MR} \\
\\
|\vec{a}| &= R|\vec{\alpha}| \\
\frac{Mg - T}{M} &= R * \frac{2T}{MR} \\
g - \frac{T}{M} &= \frac{2T}{M} \\
\frac{3T}{M} &= g \\
T &= \frac{Mg}{3} \\
a &= \frac{Mg - T}{M} \\
&= \frac{2g}{3} \\
\Rightarrow \vec{a} &= -\frac{2g}{3}\hat{j} \\
\Rightarrow \vec{T} &= \frac{Mg}{3}\hat{j} \\
\Rightarrow \vec{\alpha} &= \frac{2g}{3R}\hat{k}.
\end{aligned}
$$

- *Kütle merkezinin süratini bulunuz. Daha önce yaptığımız çözüm ile karşılaştırınız.*

$$
\begin{aligned}
v^2(t_2) &= v^2(t_1) + 2\vec{a}\cdot\triangle\vec{y} \\
v(t_1) &= 0 \\
\triangle y &= -h\hat{j} \\
v^2(t_2) &= 2\left[-\frac{2g}{3}\hat{j}\right]\cdot\left[-h\hat{j}\right] \\
&= \frac{4gh}{3}\left(\hat{j}\cdot\hat{j}\right) \\
v(t_2) &= \sqrt{\frac{4}{3}gh}
\end{aligned}
$$

Örnek 108. *Katı küre şeklinde m kütleli R yarıçaplı bir topu yatayla β açısı yapan eğik bir düzlem üzerinde kaymadan yuvarlanıyor. Topun ivmesini ve top üzerine etkiyen sürtünmenin büyüklüğünü bulunuz.*

- *Topun SCD'ını çizin.*

- *Newton Denklemlerini yazınız.*

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_{net} &= \vec{W}_t + \vec{f}_k + \vec{n} = m\vec{a}, \\
\vec{\tau}_{net} &= \vec{r}\times\vec{f}_k = I\vec{\alpha}.
\end{aligned}
$$

- *Newton denklemlerini çözerek tüm kuvvetleri ve ivmeleri verilenler cinsin-*

den bulunuz.

$$
\begin{aligned}
\vec{W}_t &= \vec{W}_{tx} + \vec{W}_{ty} \\
\vec{W}_{tx} &= mg\sin\beta\hat{i} \\
\vec{W}_{ty} &= -mg\cos\beta\hat{j} \\
\vec{n} &= n\hat{j} \\
\vec{f}_k &= -\mu_k|\vec{n}|\hat{i} \\
\vec{a} &= a_x\hat{i} \\
\vec{r} &= -R\hat{j} \\
I_{KM} &= \frac{2}{5}mR^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
mg\sin\beta\hat{i} - mg\cos\beta\hat{j} + n\hat{j} - \mu_k n\hat{i} &= ma_x\hat{i} \\
\Rightarrow mg\sin\beta\hat{i} - \mu_k n\hat{i} &= ma_x\hat{i} \\
\Rightarrow -mg\cos\beta\hat{j} + n\hat{j} &= 0 \\
n &= mg\cos\beta \\
\\
\Rightarrow \vec{n} &= mg\cos\beta\hat{j} \\
\\
\Rightarrow \vec{f}_k &= -\mu_k mg\cos\beta\hat{i} \\
\\
mg\sin\beta\hat{i} - \mu_k mg\cos\beta\hat{i} &= ma_x\hat{i} \\
a_x &= g(\sin\beta - \mu_k\cos\beta) \\
\\
\Rightarrow \vec{a} &= g(\sin\beta - \mu_k\cos\beta)\hat{i}
\end{aligned}
$$

Şu ana kadar bulduklarımızda dönme dinamiğini henüz kullanmadık.

Dönme Dinamiği ile birlikte sonuçlarımızın nasıl değiştiğine dikkat ediniz.

$$\begin{aligned}
\left(-R\hat{j}\right)\times\left(-\mu_k mg\cos\beta\hat{i}\right) &= \frac{2}{5}mR^2\vec{\alpha}\\
-mg\mu_k R\cos\beta\hat{k} &= \frac{2}{5}mR^2\vec{\alpha}\\
\Rightarrow\vec{\alpha} &= -\frac{5}{2}\frac{g\mu_k\cos\beta}{R}\hat{k}\\
|\vec{a}_{KM}| &= R|\vec{\alpha}|\\
g(\sin\beta-\mu_k\cos\beta) &= R\frac{5}{2}\frac{g\mu_k\cos\beta}{R}\\
2(\sin\beta-\mu_k\cos\beta) &= 5\mu_k\cos\beta\\
2\sin\beta &= 7\mu_k\cos\beta\\
\mu_k &= \frac{2}{7}\tan\beta
\end{aligned}$$

Bu bilgi bize dönme dinamiğinden geldi. Sürtünme katsayısını yerine yerleştirdiğimizde sonuçları elde ederiz.

$$\begin{aligned}
\vec{f_k} &= -\mu_k mg\cos\beta\hat{i}\\
&= -\frac{2}{7}\tan\beta mg\cos\beta\hat{i}\\
\Rightarrow\vec{f_k} &= -\frac{2}{7}mg\sin\beta\hat{i}\\
\vec{a} &= g(\sin\beta-\mu_k\cos\beta)\hat{i}\\
&= g(\sin\beta-\frac{2}{7}\tan\beta\cos\beta)\hat{i}\\
\Rightarrow\vec{a} &= \frac{5g}{7}\sin\beta\hat{i}\\
\vec{\alpha} &= -\frac{5}{2}\frac{g\mu_k\cos\beta}{R}\hat{k}\\
\vec{\alpha} &= -\frac{5g}{2R}\frac{2}{7}\tan\beta\cos\beta\hat{k}\\
\Rightarrow\vec{\alpha} &= -\frac{5g}{7R}\sin\beta\hat{k}
\end{aligned}$$

10.10 ÖDEV SET 10

1. Kütlesi $150kg$ olan bir çemberin yarıçapı $3m$'dir. Çember, yatay düzlem üzerinde kütle merkezinin öteleme hızı $0,15m/s$ olacak şekilde *yuvarlanmaktadır*. Çemberi durdurmak için ne kadar iş yapmak gerekir? $(-3,38J)$

2. Bir küre eğim açısı 30 derece olan bir eğik düzlemin en dip noktasından yukarı doğru dönerek çıkar. Kürenin kütle merkezinin en dip noktadaki öteleme hızı $16m/s$'dır. Küre eğik düzlem üzerinde ne kadar yukarı çıkabilir?$(11,2m)$

3. $\overrightarrow{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ konum vektörü, $\overrightarrow{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$ kuvvet vektörü olmak üzere,

   (a) Torku bulunuz?

   (b) Torkun kuvvet ve konum vektörünün oluşturduğu düzleme izdüşümünün sıfır olduğunu ispatlayınız.

4. Kütlesi $3,0kg$ olan bir parçacık $(x;y) = (3,0m;8,0m)$ noktasından geçerken hızı $\overrightarrow{v} = (5\hat{i} - 6\hat{j})m/s$ olarak verilmiştir. Parçacığa negatif x-yönünde $7,0N$'luk bir kuvvet etkimektedir.

   (a) Parçacığın açısal momentumu nedir?$(-174kg \cdot m^2/s^2)\hat{k}$

   (b) Parçacığa etkiyen tork nedir?$(56N \cdot m)\hat{k}$

   (c) Açısal momentumun birim zamanda ne kadar değiştiğini bulunuz?$(56N \cdot m)\hat{k}$

5. İçi dolu düzgün bir küre, hareketsiz durumdan başlayarak bir $H = 60m$ yükseklikteki bir tepeden aşağıya doğru kaymadan yuvarlanmaktadır. Tepenin alt ucunun yüksekliği $h = 20m$'dir ve sonu yatay doğtultuda bitmektedir. Cisim bu alt uçtan ayrıldıktan sonra hangi uzaklıkta tabana çarpar?$(47,8m)$

6. Küçük bir küre, simetri ekseni düşey doğrultu olan büyük bir yarım kürenin iç yüzeyinde kaymaksızın yuvarlanmaktadır. Küre en üst noktada hareketsiz durumdan başlayarak, yuvarlanmaktadır.

   (a) Kürenin dip noktadaki kinetik enerjisi nedir? Bu enerjinin kaçta kaçı dönmeden kaynaklanmaktadır? (2/7)

   (b) Küçük kürenin dip noktada büyük yarı küre yüzeyine dik doğrultuda uyguladığı kuvvet nedir? Küçük kürenin yarıçapı r, kütlesi m, büyük yarımkürenin yarıçapı ise R'dir. $mg\left[\frac{17R-10r}{7R}\right]$

7. Farklı yarçapları olan iki kasnak bir kayış ile birleştirilmiştir. Öyleki B kasnağının yarıçapı A kasnağının yarıçapının üç katıdır. İki kasnağın eylemsizlik momentlerinin oranı olan $\frac{I_B}{I_A}$'ı

(a) İki kasnağın da aynı açısal momentuma sahip olduğu zaman için bulunuz. 1/3

(b) İki kasnağın da aynı dönme kinetik enerjilere sahip olduğu zaman için bulunuz. 1/9

8. Yerden yapılan bir eğik atışta kütlesi m olan bir cismin ilk hızı v_0 ve yataydan yukarı doğru olan atış açısı θ_0'dır.

   (a) Atış noktasına göre cismin açısal momentumunu verilenler cinsinden zamanın fonksiyonu olarak ifade ediniz. $-(\frac{1}{2}mv_0cos\theta_0)gt^2\hat{k}$

   (b) Açısal momentumun zamana göre değişimini bulmak için açısal momentumun zamana göre türevini alınız. $-(mv_0cos\theta_0)gt\hat{k}$

   (c) Torku $\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$ i kullanrak bulun. $-(mv_0cos\theta_0)gt\hat{k}$

   (d) (b) ve (c) şıklarının neden aynı çıktığını yorumlayınız.

9. Kütlesi m ve yarıçapı R olan bir cisim yatay düzlem üzerinde kaymaksızın $\overrightarrow{v}$ hızı ile yuvarlanmaktadır. Cisim sonra değeri $h = \frac{3v^2}{4g}$ ile verilen bir maksimum yüksekliğe kadar tırmanıyor.

   (a) Cismin eylemsizlik momentini bulunuz. $\frac{mR^2}{2}$

   (b) Cisimin şekli hakkında ne söyleyebilirsiniz. $(disk/silindir)$

10. Her birinin kütlesi M olan özdeş iki blok, yarıçapı R ve eylemsizlik momenti I olan bir makara üzerinden geçen sicimin iki ucuna tutturulmuştur. Sicim makaranın üzerinde kaymadan hareket etmektedir. Blok ile üzerinde kaydığı yüzey arasında sürtünmenin olup olmadığı bilinmemektedir. Yalnız makara yatakları üzerinde sürtünmesiz olarak dönmektedir. Sistem harekete başladığında, makaranın t zaman aralığında θ kadar döndüğü ve blokların sabit bir ivme ile hareket ettiği gözlemlenmiştir.

    (a) Makaranın açısal ivmesi nedir? $(2\theta/t^2)$

    (b) Blokların ivmesi nedir? $(2\theta R/t^2)$

    (c) Sicimin üst ve alt kısımlarındaki gerilim nedir? $Mg(1 - 2\theta R/gt^2)$, $Mg - 2\theta/t^2\Big(MR + I/R\Big)$

11. Uzun bir baca tabanı yakınlarından çatlayarak yıkılır. Bacanın düşeyle yaptığı θ açısının bir fonksiyonu olarak en üst noktasının

    (a) Merkezcil ivmesini,

    (b) Teğer doğrultusundaki çizgisel ivmesini bulunuz. $3g(1 - \cos\theta)$

    (c) Toplam çizgisel ivme g'den daha büyük bir değer alabilir mi? $(3g\sin\theta)/2$

    (d) Yıkılma süresince bacada çatlamalar oluşur. Nedeni sizce nedir?